WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE REIHE · JG. IX (1959/60) 2
WISS. Z. HUMBOLDT-UNIV. BERLIN, MATH.-NAT. R. IX (1959/60)

Als Manuskript gedruckt

Aus dem II. Mathematischen Institut der Humboldt Universität zu Berlin,
Direktor: Nationalpreisträger Prof. Dr. KURT SCHRÖDER

Variationsmethoden in der nichtlinearen Elastizitäts- und Plastizitätstheorie*

Von ARNO LANGENBACH, Berlin Habilitation 6. 3. 1962

INHALT

Einleitung
I. Ein Beispiel
II. Die elastisch-plastische Deformation
III. Creep-Probleme
IV. Das Variationsprinzip
V. Anwendungen des Variationsprinzips
VI. Die Stetigkeitseigenschaften verallgemeinerter Lösungen und ihrer Ableitungen
VII. Erweiterung der Funktionale
VIII. Das RITZsche Verfahren
Literatur

Einleitung

In dieser Arbeit wird eine Reihe bekannter Probleme der auf HENCKY zurückgehenden Plastizitätstheorie gelöst. Diese Probleme wurden den im Literaturverzeichnis angegebenen Monographien und Schriften entnommen. Bei der Lösung der Probleme wird wie folgt verfahren:

Das Problem erhält die Gestalt einer Operatorengleichung $Pu = f$ im HILBERT-Raum H. Der Operator P erweist sich hierbei als Gradient eines Funktionals $\Phi(u)$, für das ein Minimumproblem formuliert werden kann. Eine verallgemeinerte Lösung kann für $f \in H$ durch Minimalfolgen erklärt werden; für die verallgemeinerte Lösung läßt sich der Einzigkeitsbeweis durchführen.

Der mathematischen Formulierung der Probleme sind die Abschnitte II und III gewidmet. Abschnitt IV enthält Formulierung und Lösung des Variationsproblems, Abschnitt V die Anwendung dieser Ergebnisse auf die eingangs formulierten Probleme. Die Abschnitte VI und VII enthalten Sätze über die Existenz von schwachen Lösungen, wobei den Untersuchungen in VI die schwache Konvergenz, in VII die starke Konvergenz in ORLICZ-Räumen zugrunde liegt. Abschnitt VIII schließlich enthält den Konvergenzbeweis für das RITZsche Näherungsverfahren für die unter VII betrachteten Probleme.

Die benutzte Terminologie unterscheidet sich nicht wesentlich von derjenigen einschlägiger Arbeiten, die im Literaturverzeichnis genannt sind. In den Anwendungen bezeichnet Ω ein endliches Gebiet, dessen Grenze die Anwendung des GAUSSschen Satzes gestatten soll.

Nat* Als Habilitationsschrift eingereicht.

I. Ein Beispiel

Im Torsionsproblem der Theorie elastisch-plastischer Deformationen wird die Spannungsfunktion $u(x, y)$ gesucht, die im endlichen, einfach zusammenhängenden Gebiet Ω der partiellen Differentialgleichung (1)

$$P(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[f(T^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f(T^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\omega$$
$$\omega = \text{const}, \quad T^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{1.1}$$

und der Randbedingung $u|_s = \text{const}$ (1.2)
genügt. $f(\xi^2)$ ist eine empirische Funktion (Abb. 1), für rein elastische Deformation ist $f(\xi^2) = \frac{1}{2G} = \text{const}$. In diesem Fall geht (1.1) in die bekannte POISSONsche Gleichung über. Eine elegante Lösung des Problems (1.1), (1.2) erhält man für das Kreisgebiet:

$$u(x, y) = -\frac{2}{\omega}\int_0^{\frac{\omega}{2}r} q(\xi)\, d\xi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.3}$$

In (1.3) ist $q(\xi)$ die zu $p(\xi) = f(\xi^2)\xi$ inverse Funktion (Abb. 1).

In diesem Fall hängt also die Existenz und Eindeutigkeit des inversen Operators P^{-1} von der Existenz und Eindeutigkeit des Inversen der Funktion $E(T)$ ab.

Dieses einfache Beispiel vereinigt in sich die wesentlichen Merkmale unserer späteren Ergebnisse und sei deshalb vorangestellt.

II. Die elastisch-plastische Deformation

Wir betrachten einen endlichen Körper, der sich unter der Einwirkung von äußeren Kräften im Gleichgewicht befindet. Hierbei sei die Verformung des Körpers so gering, daß die geometrischen Relationen der klassischen Elastizitätstheorie benutzt werden können; insbesondere heißt das, daß die geometrische Verformung bei der Projektion der Kräfte in den Gleichgewichtsbedingungen außer acht gelassen werden kann.

Das lineare HOOKEsche Gesetz ersetzen wir durch nichtlineare Relationen zwischen Spannungen und

RIJKS-UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Deformationen und kommen damit zu dem Gleichungssystem, welches zuerst von HENCKY [1] angegeben wurde:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=0\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y=0\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x-\frac{1}{3}\varepsilon=f(T^2)\,(\sigma_x-\sigma)\\
&\varepsilon_y-\frac{1}{3}\varepsilon=f(T^2)\,(\sigma_y-\sigma)\\
&\varepsilon_z-\frac{1}{3}\varepsilon=f(T^2)\,(\sigma_z-\sigma)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma_{xy}=2f(T^2)\,\tau_{xy}\\
&\gamma_{xz}=2f(T^2)\,\tau_{xz}\\
&\gamma_{yz}=2f(T^2)\,\tau_{yz}\\
&\varepsilon=3k\sigma
\end{aligned} \tag{2.3}$$

In den Gleichungen (2.1), (2.2), (2.3) bezeichnen σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} die Spannungen, X, Y, Z die Komponenten der Massenkräfte

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u_1}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial u_2}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial u_3}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x},\quad \gamma_{xz}=\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial u_3}{\partial x},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial u_3}{\partial y}$$

die Deformationen, u_1, u_2, u_3 die Verschiebungen;

$$T^2=\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2+\frac{1}{6}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2\right]$$

und

$$E^2=\gamma_{xy}^2+\gamma_{xz}^2+\gamma_{yz}^2+\frac{2}{3}\left[(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2\right]$$

sind Invarianten des Spannungs- bzw. Deformationstensors und werden Intensität der Schubspannungen und Intensität der Winkelverzerrungen genannt;

$$\varepsilon=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_y \quad \text{und} \quad \sigma=\frac{1}{3}\left[\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right]$$

sind weitere Tensorinvarianten, und

$$k=\frac{1-2\nu}{E}$$

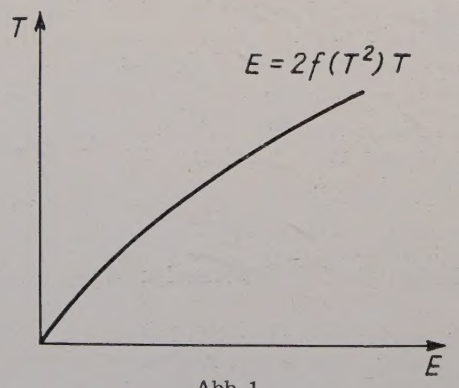

Abb. 1

ist der Kompressionsmodul. Schließlich ist $E(T)=2f(T^2)T$ eine empirische Funktion, die gewöhnlich dem Diagramm für einen einfachen Belastungsvorgang entnommen wird (Abb. 1). Wir werden im folgenden immer voraussetzen, daß diese Funktion ein eindeutig bestimmtes Inverses besitzt:

$$T=2g(E)\,E.$$

Die Relationen (2.2), (2.3) ordnen jedem Deformationszustand einen eindeutig bestimmten Spannungszustand zu; sie beschreiben also einen nichtlinearen elastischen Deformationsvorgang, in dem keine Restspannungen auftreten, die für plastische Deformationen charakteristisch sind. Dessenungeachtet werden die Gleichungen (2.1) bis (2.3) oft zur Beschreibung plastischer Deformationen benutzt und liefern bei einfachen Belastungsvorgängen brauchbare Ergebnisse.

Zur vollständigen Beschreibung des Gleichgewichtsproblems gehören schließlich die Randbedingungen. Wir sprechen von dem ersten Randwertproblem, wenn die Verschiebungen an der Oberfläche des Körpers vorgegeben werden:

$$\vec{u}|_s=(u_1, u_2, u_3)|_s=\vec{\varphi}(s).$$

Aus der Existenz eines Inversen der Funktion $E(T)$ in der angegebenen Form folgt

$$\frac{1}{2f(T^2)}=2g(E^2);$$

gehen wir hiermit in die Gleichungen (2.2) ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.3)

$$\begin{aligned}
&\sigma_x=4g(E^2)\,\varepsilon_x+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{k}-4g(E^2)\right]\varepsilon\\
&\sigma_y=4g(E^2)\,\varepsilon_y+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{k}-4g(E^2)\right]\varepsilon\\
&\sigma_z=4g(E^2)\,\varepsilon_z+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{k}-4g(E^2)\right]\varepsilon\\
&\tau_{xy}=2g(E^2)\,\gamma_{xy}\\
&\tau_{xz}=2g(E^2)\,\gamma_{xz}\\
&\tau_{yz}=2g(E^2)\,\gamma_{yz}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Wir können $\sigma_x[\vec{u}], \ldots, \tau_{yz}[\vec{u}]$ also als gegebene Operatoren auf einer passend gewählten Mannigfaltigkeit von Verschiebungsvektoren auffassen; führt man schließlich die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
P_x[\vec{u}]&\equiv\frac{\partial}{\partial x}\sigma_x[\vec{u}]+\frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy}[\vec{u}]+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz}[\vec{u}]\\
P_y[\vec{u}]&\equiv\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy}[\vec{u}]+\frac{\partial}{\partial y}\sigma_y[\vec{u}]+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{yz}[\vec{u}]\\
P_z[\vec{u}]&\equiv\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xz}[\vec{u}]+\frac{\partial}{\partial y}\tau_{yz}[\vec{u}]+\frac{\partial}{\partial z}\sigma_z[\vec{u}]
\end{aligned}$$

ein, so nimmt das erste Randwertproblem die Form

$$\vec{P}[\vec{u}]=-\vec{K};\quad \vec{P}=(P_x, P_y, P_z),\quad \vec{K}=(X, Y, Z) \tag{2.5}$$

$$\vec{u}|_s=\vec{\varphi}(s) \tag{2.6}$$

an.

Analog läßt sich das zweite Randwertproblem in der Form

$$\vec{P}[\vec{u}]=-\vec{K} \quad \text{in } \Omega \tag{2.5}$$

$$\vec{Q}[\vec{u}]=\vec{T} \quad \text{auf } s \tag{2.7}$$

schreiben; hierin ist nach den bekannten Relationen der Elastizitätstheorie

$$\begin{aligned}
Q_x&\equiv\sigma_x[\vec{u}]\cos nx+\tau_{xy}[\vec{u}]\cos ny+\tau_{xz}[\vec{u}]\cos nz\\
Q_y&\equiv\tau_{xy}[\vec{u}]\cos nx+\sigma_y[\vec{u}]\cos ny+\tau_{yz}[\vec{u}]\cos nz\\
Q_z&\equiv\tau_{xz}[\vec{u}]\cos nx+\tau_{yz}[\vec{u}]\cos ny+\sigma_z[\vec{u}]\cos nz,\\
\vec{Q}&=(Q_x, Q_y, Q_z),\ \vec{T}=(X_n, Y_n, Z_n).
\end{aligned}$$

Im Problem (2.5), (2.7) sind Differentialgleichung und Randbedingungen nichtlinear; deshalb ist es in diesem Fall günstiger, ein Randwertproblem unmittelbar für die Spannungen anzugeben. Differentialgleichungen, die den Gleichungen von BELTRAMI und MITCHELL

der klassischen Theorie entsprechen, wurden von G. J. DSHANELIDSE [2] angegeben.

Während die allgemeine Form dieser Gleichungen wegen mathematischer Schwierigkeiten kaum Beachtung fand, wurden verschiedene ebene Probleme, die sich aus diesen Gleichungen ableiten lassen, öfter in der Literatur behandelt. Dies gilt in erster Linie für das Torsionsproblem. Hier sind lediglich die Spannungen $\tau_{xz}(x, y)$ und $\tau_{yz}(x, y)$ von Null verschieden. Durch Einführung der PRANDTLschen Funktion $u(x, y)$; $\tau_{xz} = \frac{\partial u}{\partial y}$; $\tau_{yz} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ werden die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, während sich die Verträglichkeitsbedingungen auf die einzige Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(T^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f(T^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\omega = \text{const}, \qquad T^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{2.8}$$

reduzieren. Ω ist hierbei ein beliebiger Querschnitt des betrachteten Stabes. Handelt es sich um einen Hohlstab, so ist Ω mehrfach zusammenhängend; die entsprechenden Randbedingungen werden durch die Forderung stetiger Verschiebungen dann nichtlinear. Ist Ω einfach zusammenhängend, so lautet die Randbedingung

$$u|_s = 0. \tag{2.9}$$

Das Torsionsproblem (2.8), (2.9) wurde in einer Arbeit von A. I. KOSCHELEW [3] untersucht. Die in dieser Arbeit enthaltenen Existentialaussagen fordern einen glatten Rand s und legen der Funktion $f(T^2)$ ziemlich harte Beschränkungen auf.

Im ebenen Deformationszustand sind die Spannungen $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\sigma_z(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$ von Null verschieden; durch Einführung der Spannungsfunktion $U(x, y)$[1]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}$$

führen die allgemeinen Gleichungen auf das Randwertproblem.

$$\sigma_z = \Delta U \frac{f(T^2) - k}{2f(T^2) + k} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(T^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[f(T^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[f(T^2)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right] - \Delta[f(T^2)\sigma_z] = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{2.11}$$

$$T^2 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \sigma_z\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \sigma_z\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2\right]$$

$$U|_s = \varphi(s); \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_s = \psi(s). \tag{2.12}$$

Im ebenen Spannungszustand endlich ist $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$; die im vorigen Problem eingeführte Spannungsfunktion genügt dann dem Randwertproblem

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(T^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[f(T^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[f(T^2)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right] + k\Delta^2 U - \frac{1}{3}\Delta[f(T^2)\Delta U] = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{2.13}$$

$$T^2 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right]$$

$$U|_s = \varphi_1(s); \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_s = \psi_1(s) \tag{2.14}$$

[1] Wie in der klassischen Theorie vernachlässigen wir bei der Betrachtung ebener Probleme die Massenkräfte.

III. CREEP-Probleme[2]

CREEP-Prozesse kann man als instationäres plastisches Fließen betrachten. Gewöhnlich verläuft dieser Prozeß so langsam, daß man die Gleichgewichtsbedingungen in der Form (2.1) verwenden, die Trägheitsglieder also vernachlässigen kann. Die Spannungen $\sigma_x, \ldots, \tau_{yz}$ hängen hier jedoch nicht nur von der Ortskoordinate, sondern auch von der Zeit t und im allgemeinen auch noch von der Temperatur θ ab. Die letztere Abhängigkeit wollen wir aber vernachlässigen. An Stelle des Gleichungssystems (2.2) tritt in dieser Theorie das System

$$\begin{aligned}
\xi_x &= f(T^2, t)(\sigma_x - \sigma) + \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_x - \frac{3\nu}{1+\nu}\sigma\right)\\
\xi_y &= f(T^2, t)(\sigma_y - \sigma) + \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_y - \frac{3\nu}{1+\nu}\sigma\right)\\
\xi_z &= f(T^2, t)(\sigma_z - \sigma) + \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma_z - \frac{3\nu}{1+\nu}\sigma\right)\\
\eta_{xy} &= 2f(T^2, t)\tau_{xy} + \frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial t}\tau_{xy}\\
\eta_{xz} &= 2f(T^2, t)\tau_{xz} + \frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial t}\tau_{xz}\\
\eta_{yz} &= 2f(T^2, t)\tau_{yz} + \frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial t}\tau_{yz}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

In diesem System bezeichnen $\xi_x, \ldots \eta_{yz}$ Deformationsgeschwindigkeiten; bei kleinen Deformationen setzt man

$$\xi_x = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_x, \ldots, \eta_{yz} = \frac{\partial}{\partial t}\gamma_{yz}.$$

Die Randbedingungen hängen in den meisten Fällen nicht von der Zeit ab: entweder betrachtet man die Deformation unter der Einwirkung äußerer Belastungen und errechnet die Deformationsgeschwindigkeiten, aus denen die zulässige Belastungsdauer bestimmt wird; oder aber es werden die Verschiebungen vorgegeben, und man bestimmt die Spannungsminderung, die durch das Kriechen hervorgerufen wird. In jedem Fall kann man den Deformationszustand zunächst als elastisch betrachten. Für $t \to \infty$ erhält man wieder eine stationäre Lösung, da die Funktion $f(T^2, t)$ erfahrungsgemäß für große t konstant bleibt. Hieraus folgt, daß (3.1) für große t in der Form

$$\begin{aligned}
\xi_x'' &= f(T^2, \infty)(\sigma_x'' - \sigma'')\\
\xi_y'' &= f(T^2, \infty)(\sigma_y'' - \sigma'')\\
\xi_z'' &= f(T^2, \infty)(\sigma_z'' - \sigma'')\\
\eta_{xy}'' &= 2f(T^2, \infty)\tau_{xy}''\\
\eta_{xz}'' &= 2f(T^2, \infty)\tau_{xz}''\\
\eta_{yz}'' &= 2f(T^2, \infty)\tau_{yz}''
\end{aligned} \tag{3.2}$$

geschrieben werden kann, wobei durch zwei Striche die Lösung des stationären CREEP-Prozesses gekennzeichnet sein soll. Durch einen Strich kennzeichnen wir die Lösung des elastischen Problems. L. M. KATSCHANOW schlägt für eine Näherungslösung den Ansatz

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_x' + \tau(t)(\sigma_x'' - \sigma_x')\\
\sigma_y &= \sigma_y' + \tau(t)(\sigma_y'' - \sigma_y')\\
\tau_{yz} &= \tau_{yz}' + \tau(t)(\tau_{yz}'' - \tau_{yz}')
\end{aligned} \tag{3.3}$$

vor und erhält für $f(T^2, t) = B(t)f(T^2)$ zur Bestimmung der unbekannten Funktion $\tau(t)$. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\bar{\Pi}(\tau)}{d\tau^2}\frac{d\tau}{dt} + B(t)\frac{d\bar{A}_1(\tau)}{d\tau} = 0. \tag{3.4}$$

[2] Die Gleichungen des CREEP-Problems entnahmen wir einer Monographie von L. M. KATSCHANOW [4].

In (3.4) wurden folgende Bezeichnungen gewählt:

$$\Lambda = \int_0^{T^2} f(\zeta, t)\, d\zeta = B(t) \int_0^{T^2} f(\zeta)\, d\zeta = B(t)\, \Lambda_1$$

$$\Pi = \frac{3}{2} k\sigma^2 + \frac{1}{2G} T^2$$

$$\bar{\Lambda}_1 = \int_\Omega \Lambda_1\, d\Omega, \quad \bar{\Pi} = \int_\Omega \Pi\, d\Omega .$$

Nach den vorausgegangenen Erläuterungen ist offensichtlich, daß $\tau(t)$ der Anfangsbedingung

$$\tau(0) = 0 \tag{3.5}$$

genügen muß. Setzt man nun $\sigma_x', \ldots, \tau_{yz}'$ und $\sigma_x'', \ldots, \tau_{yz}''$ als bekannt voraus, so läßt sich $\tau(t)$ eindeutig bestimmen. Die Gleichung (3.4) ist Ausdruck eines Variationsprinzips, dessen allgemeine Fassung ebenfalls von L. M. Katschanow stammt; dieses Prinzip stellt eine Verallgemeinerung des in der linearen Theorie als Prinzip von Castigliano bekannten Minimumproblems dar. Zur Beschreibung eines instationären Creep-Prozesses genügt es also, die elastische Lösung und die Lösung des stationären Creep-Prozesses zu kennen. Dieser Prozeß läßt sich durch die Gleichgewichtsbedingungen (2.1), die Relationen (3.2) und entsprechende Randbedingungen beschreiben, stellt also eine vereinfachte Form der Gleichungen des elastisch-plastischen Problems dar; an Stelle der Verschiebungen u_1, u_2, u_3 sind lediglich die Geschwindigkeiten $\frac{\partial u_1}{\partial t}$, $\frac{\partial u_2}{\partial t}$, $\frac{\partial u_3}{\partial t}$ zu setzen.

Als Beispiel werden wir den Creep-Prozeß in einer eingespannten Platte unter dem Druck $p(x, y)$ betrachten.

Unter den in der Plattentheorie üblichen Voraussetzungen kann man die Deformationsgeschwindigkeiten $\xi_x, \ldots, \eta_{yz}$ durch die Geschwindigkeit $w = \frac{\partial u_3}{\partial t}$ ausdrücken.

$$\xi_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\quad \xi_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \eta_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \tag{3.6}$$

$$\eta_{xz} = \eta_{yz} = 0.$$

Da man in stationären Creep-Prozessen das Medium als inkompressibel betrachtet, gilt noch

$$\xi_z = -(\xi_x + \xi_y) = z\Delta w . \tag{3.7}$$

Die Auflösung der Gleichungen (3.2) nach den Spannungen ergibt

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma &= 4g(H^2)\, \xi_x & \tau_{xy} &= 2g(H^2)\, \eta_{xy} \\ \sigma_y - \sigma &= 4g(H^2)\, \xi_y & \tau_{xz} &= 2g(H^2)\, \eta_{xz} \\ \sigma_z - \sigma &= 4g(H^2)\, \xi_z & \tau_{yz} &= 2g(H^2)\, \eta_{yz} . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Mit H bezeichnen wir die entsprechende Invariante des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten:

$$H^2 = \eta_{xy}^2 + \eta_{xz}^2 + \eta_{yz}^2 + \frac{2}{3}[(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2].$$

Mit den Vereinfachungen (3.6), (3.7) gilt dann

$$H^2 = 4z^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 4z^2 \tilde{H}^2 .$$

Setzt man noch $3\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \approx \sigma_x + \sigma_y$, so lassen sich auch die Spannungen durch w allein ausdrücken

$$\sigma_x = -8g(H^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z$$

$$\sigma_y = -8g(H^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z$$

$$\tau_{xy} = -4g(H^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} z .$$

Führt man die in der Plattentheorie übliche Mittelwertbildung durch, so liefern die Gleichgewichtsbedingungen die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[g^*(\tilde{H}^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[g^*(\tilde{H}^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \left[g^*(\tilde{H}^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \right] = \frac{1}{D} p(x, y) . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Hierin ist $g^*(\tilde{H}^2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 g(H)^2\, dz$ und D eine Konstante.

Die Randbedingungen lauten

$$w|_s = \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_s = 0 . \tag{3.10}$$

IV. Das Variationsprinzip

Wir betrachten die Gleichung

$$Pu = f \tag{4.1}$$

mit dem nichtlinearen Differentialoperator P. f ist eine reelle Funktion, die in einem Gebiet $\Omega \subset R_n$ erklärt ist. Außer der Gleichung (4.1) seien auf dem Rand S des Gebietes r Randbedingungen gegeben, die wir als linear und — wenigstens vorläufig — als homogen betrachten:

$$\Gamma_i u = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, r). \tag{4.2}$$

Im folgenden nehmen wir an, f sei ein gegebenes Element eines Hilbert-Raumes $H(\Omega)$. In H zeichnen wir eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ derjenigen Funktionen aus, die den Operator in folgendem Sinn zulassen: $P(\mathfrak{M}) \subset H$. Als Definitionsgebiet des Operators P bezeichnen wir die Menge $\mathfrak{M}^0 \subset \mathfrak{M}$, deren Elemente den Bedingungen (4.2) genügen; auch $\mathfrak{M}^0$ ist linear. Das Randwertproblem (4.1), (4.2) formulieren wir nun in der folgenden Weise: Gesucht ist ein Element $u \in \mathfrak{M}^0$, welches der Gleichung (4.1) genügt. Die Lösung dieses Problems führen wir in zwei Schritten durch. Wir weisen zunächst nach, daß es unter passenden Bedingungen für den Operator P ein zum formulierten Randwertproblem äquivalentes Variationsproblem gibt. Dann erweitern wir das in Frage kommende Funktional in der Weise, daß

1. die Existenz einer Lösung des Variationsproblems nachgewiesen werden kann und
2. diese Lösung eindeutig ist.

Dieser Weg ist bei der Lösung linearer Gleichungen zuerst von K. Friedrichs beschritten worden und gehört heute zu den wirkungsvollsten Verfahren der linearen Operatorentheorie.

Satz 1

Voraussetzungen:

A) $\mathfrak{M}^0$ sei dicht in $H(\Omega)$; das schwache Differential[3] $P'(x)y$ existiert für beliebige $x, y \in \mathfrak{M}$, ist linear in y und als Element des Raumes H stetig in jeder zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, die den Punkt x enthält; $P(0) = 0$

B) $(P'(x)\, h_1, h_2) = (P'(x)\, h_2, h_1)$ für $x \in \mathfrak{M}$; $h_1, h_2 \in \mathfrak{M}^0$

C) $(P'(x)\, h, h) > 0$ für $x \in \mathfrak{M}$; $h \in \mathfrak{M}^0$; $h \neq 0$.

[3] Definitionsgemäß ist [6]

$$P'(x)\, y = \lim_{t \to 0} \frac{P(x + ty) - P(x)}{t} .$$

Wenn unter diesen Voraussetzungen eine Lösung der Gleichung

$$Pu = f,\ u \in \mathfrak{M}^0$$

existiert, so behaupten wir

1. diese Lösung ist eindeutig bestimmt,
2. sie realisiert das Minimum des Funktionals

$$\Phi(u) = \int_0^1 (Ptu, u)\, dt - (f, u) \tag{4.3}$$

auf $\mathfrak{M}^0$.

3. Umgekehrt ist das Element $u_0 \in \mathfrak{M}^0$, welches das Minimum des Funktionals $\Phi(u)$ realisiert, Lösung der Gleichung (4.1).

Beweis:

Nehmen wir zunächst an, daß entgegen der Behauptung 1. zwei Lösungen $u_1,\ u_2 \in \mathfrak{M}^0$ der Gleichung (4.1) existieren; dann ist $Pu_1 - Pu_2 = 0$, woraus folgt $(Pu_1 - Pu_2,\ u_1 - u_2) = 0$. Wir wenden nun die Formel

$$Pu_1 - Pu_2 = \int_0^1 P'(\xi_t)\,(u_1 - u_2)\, dt \tag{4.4}$$
$$\xi_t = t u_1 + (1-t)\, u_2$$

an; da das innere Produkt stetig und distributiv, $P'(\xi_t)$ stetig ist, können wir Integration und Multiplikation vertauschen [6], § 201. Wir erhalten dann

$$\int_0^1 (P'(\xi_t)\,(u_1 - u_2),\ u_1 - u_2)\, dt = 0.$$

Der Integrand ist hierin stetig und positiv, daher

$$(P'(\xi_\tau)\,(u_1 - u_2),\ u_1 - u_2) = 0,\quad 0 < \tau < 1$$

und nach Bedingung C $u_1 - u_2 = 0$.

Im folgenden benötigen wir die Differenz

$$\Phi(u+h) - \Phi(u) = \int_0^1 [(Pt(u+h), u+h) - (Ptu, u)]\, dt - (f, h) =$$
$$= \int_0^1 (Pt(u+h),\ h)\, dt + \int_0^1 (Pt(u+h) - Ptu,\ u)\, dt - (f, h).$$

Hierin ist

$$\int_0^1 (Pt(u+h) - Ptu, u)\, dt = \int_0^1 dt \int_0^t \frac{d}{ds} (P(tu + sh), u)\, ds =$$
$$= \int_0^1 ds \int_s^1 (P'(tu + sh)\, h, u)\, dt =$$
$$= \int_0^1 ds \int_s^1 (P'(tu + sh)\, u, h)\, dt =$$
$$= \int_0^1 (P(u + sh) - Ps(u+h), h)\, ds.$$

Hiermit erhält man die gewünschte Darstellung:

$$\Phi(u+h) - \Phi(u) = \int_0^1 (P(u + th),\ h)\, dt - (f, h). \tag{4.5}$$

Bei der Ableitung der Formel (4.5) benutzten wir die Stetigkeitseigenschaften und die Symmetrie des Operators P' (Bedingungen A und B). Man beweist nun leicht die zweite Behauptung des Satzes. Es sei nämlich $u_0 \in \mathfrak{M}^0$ und $Pu_0 = f$. Setzt man u_0 in (4.5) ein, so erhält man

$$\Phi(u_0 + h) = \Phi(u_0) + \int_0^1 (P(u_0 + th) - P(u_0), h)\, dt$$

und unter Berücksichtigung von (4.4)

$$\Phi(u_0 + h) = \Phi(u_0) + \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_0^1 (P'(u_0 + sth)\, th, th)\, ds;$$

$u_0 + h$ kann man als beliebiges Element aus $\mathfrak{M}^0$ betrachten. Wegen der Bedingung C erreicht $\Phi(u_0 + h)$ sein Minimum für $h = 0$. Wenn schließlich $u_0 \in \mathfrak{M}^0$ das Minimum des Funktionals $\Phi(u)$ realisiert, so gilt

$$\frac{d}{dt} [\Phi(u_0 + th)]_{t=0} = 0.$$

Nach der Formel (4.5) ist aber

$$\Phi(u_0 + th) - \Phi(u_0) = \int_0^1 (P(u_0 + sth), th)\, ds - (f, th)$$

oder

$$\frac{\Phi(u_0 + th) - \Phi(u_0)}{t} = \int_0^1 (P(u_0 + sth) - f, h)\, ds.$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist stetig; daher kann man den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden und erhält für $t \to 0$

$$0 = (Pu_0 - f, h);$$

da $h \in \mathfrak{M}^0$ beliebig, $\mathfrak{M}^0$ seinerseits dicht in H ist, so folgt hieraus

$$Pu_0 - f = 0.$$

Damit ist auch die letzte Behauptung des Satzes bewiesen.

Die Lösung des Minimumproblems

Bisher setzten wir die Existenz einer Lösung entweder der Operatorengleichung oder des äquivalenten Minimumproblems voraus. Wir zeigen nun, daß das Variationsproblem — wenigstens in einem verallgemeinerten Sinn — immer eine Lösung besitzt. Hierzu ist es jedoch nötig, die Bedingung C durch die schärfere Bedingung D zu ersetzen: $(P'(x)h, h) \geqslant \gamma^2 \|h\|^2$ für $x \in \mathfrak{M},\ h \in \mathfrak{M}^0$, $0 < \gamma = \text{const}$, wobei γ nicht von x, h abhängt.

Satz 2

Unter den Bedingungen A, B, D besitzt das Funktional $\Phi(u)$ eine untere Schranke auf $\mathfrak{M}^0$.

Beweis:

$$\Phi(u) = \int_0^1 (Ptu, u)\, dt - (f, u) = \int_0^1 (Ptu, tu) \frac{dt}{t} - (f, u)\eta$$
$$\geqslant \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_0^1 (P'(stu)\, tu, tu)\, ds - |(f, u)| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\gamma^2}{2} \|u\|^2 - \|f\|\,\|u\| \geqslant -\frac{1}{2\gamma^2} \|f\|^2.$$

In diesen Berechnungen benutzten wir die Formel (4.4) und die Schwarzsche Ungleichung $|(u, v)| \leqslant \|u\|\,\|v\|$.

Aus dem bewiesenen Satz folgt die Existenz einer Minimalfolge

$$\{u_n\} \subset \mathfrak{M}^0 : \lim_{n \to \infty} \Phi(u_n) = d;$$

mit d bezeichnen wir die genaue untere Schranke von $\Phi(u)$ auf $\mathfrak{M}^0$. Wir müssen nun untersuchen, ob die Folge $\{u_n\}$ gegen ein Grenzelement konvergiert. Hierzu bilden wir für $u_k,\ u_l \in \mathfrak{M}^0$ das Funktional

$$\varrho_\Phi(u_k, u_l) = \frac{1}{2} \Phi(u_k) + \frac{1}{2} \Phi(u_l) - \Phi\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right). \tag{4.6}$$

ϱ_Φ hängt nicht von der Funktion f ab und ist offensichtlich symmetrisch in u_k, u_l. Mit den Bezeichnungen

$u_k = x$, $u_l = x + h$ erhalten wir mit Hilfe der Formel (4.5)

$$\varrho_\Phi(u_k, u_l) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x) - \Phi\left(x + \frac{h}{2}\right)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\Phi(x+h) - \Phi\left(x + \frac{h}{2}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(P\left(x + s\frac{h}{2}\right), \frac{h}{2}\right) ds +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \left(P\left(x + \frac{h}{2} + s\frac{h}{2}\right), \frac{h}{2}\right) ds =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(P\left(x + \frac{h}{2} + s\frac{h}{2}\right) - P\left(x + s\frac{h}{2}\right), \frac{h}{2}\right) ds.$$

Die Umformung nach (4.4) ergibt dann

$$\varrho_\Phi(u_k, u_l) = \frac{1}{2}\int_0^1 ds \int_0^1 \left(P'\left(x + (s+t)\frac{h}{2}\right)\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) dt \geq \frac{\gamma^2}{8}\|h^2\|.$$

Kehren wir nun zu der Bezeichnung $h = u_l - u_k$ zurück, so folgt aus der letzten Abschätzung, daß $\varrho_\Phi(u_k, u_l)$ positiv ist und dann und nur dann verschwindet, wenn $\| u_k - u_l \| = 0$ gilt.

Satz 3

Unter den Bedingungen A, B, D konvergiert jede Minimalfolge des Funktionals $\Phi(u)$ stark in der Metrik von H.

Beweis:

Auf $\mathfrak{M}^0$ haben wir $\Phi(u) \geq d$. Ist $\{u_n\}$ eine Minimalfolge und k, l hinreichend groß, so gilt für ein beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\Phi(u_k) < d + \varepsilon;\ \Phi(u_l) < d + \varepsilon;$$
$$\varrho_\Phi(u_k, u_l) = \frac{1}{2}\Phi(u_k) + \frac{1}{2}\Phi(u_l) - \Phi\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right)$$
$$< \frac{1}{2}(d+\varepsilon) + \frac{1}{2}(d+\varepsilon) - d = \varepsilon.$$

Aus der Abschätzung

$$\varepsilon > \varrho_\Phi(u_k, u_l) \geq \frac{\gamma^2}{8}\|u_k - u_l\|^2$$

folgt dann die Behauptung.

Definition 1

Den Grenzwert u_0 der Folge $\{u_n\}$, dessen Existenz wir soeben bewiesen haben, nennen wir eine verallgemeinerte Lösung des Randwertproblems (4.1), (4.2).

Satz 4

Unter den Bedingungen A, B, D ist die verallgemeinerte Lösung des Problems (4.1), (4.2) eindeutig bestimmt.

Beweis:

Wir lassen die Existenz von zwei verallgemeinerten Lösungen u_0, v_0 zu, die Grenzwerte der Folgen $\{u_n\} \subset \mathfrak{M}^0$ bzw. $\{v_n\} \subset \mathfrak{M}^0$ sind. Dann wählen wir n so groß, daß die Ungleichungen

$$\Phi(u_n) < d + \varepsilon;\ \Phi(v_n) < d + \varepsilon$$

erfüllt sind. Der weitere Beweisverlauf unterscheidet sich nicht von dem des vorigen Satzes und liefert $\| u_0 - v_0 \| = 0$.

Da das Funktional $\Phi(u)$ nicht für alle Elemente des Raumes H erklärt ist, so bleibt die Frage nach einer exakten Lösung des Minimumproblems vorläufig offen. Unter weiteren wesentlichen Einschränkungen, die nur in Spezialfällen eine Abschwächung gestatten, wird dieses Problem im folgenden gelöst.

Inhomogene Randwertprobleme

Die Randbedingungen (4.2) wurden von uns bisher als homogen vorausgesetzt. Hierbei war es nicht nötig, die Menge $\mathfrak{M}$ einzuführen: man überzeugt sich leicht, daß die Sätze 1–4 auch dann Gültigkeit besitzen, wenn man in den Bedingungen B, C, D $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{M}^0$ ersetzt. Ähnlich wie in der linearen Theorie kann man die Ergebnisse dieser Sätze auch auf inhomogene Randwertprobleme übertragen, wenn überhaupt eine Funktion $v \in \mathfrak{M}$ existiert, die die vorgegebenen Randwerte annimmt. Wir betrachten also das Randwertproblem

$$Pu = f \tag{4.1}$$
$$\Gamma_i u = \varphi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{4.7}$$

$v \in \mathfrak{M}$ sei diejenige Funktion, die die Randbedingungen (4.7) erfüllt. Wir setzen $u = w + v$ und erhalten für w folgendes Randwertproblem

$$Dw = P(w+v) - Pv = f - Pv$$
$$\Gamma_i w = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Definitionsgemäß ist

$$D'(x)\,h = \lim_{t \to 0} \frac{D(x + th) - D(x)}{t} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{P(x + v + th) - P(x+v)}{t} = P'(x+v)\,h.$$

Man überzeugt sich sofort, daß hinsichtlich des Operators D die Bedingungen A, B, C, D erfüllt sind, wenn P diese Bedingungen erfüllt. In diesem Sinn lassen sich die Sätze 1–4 auch auf das Problem (4.1), (4.7) anwenden.

V. Anwendungen des Variationsprinzips

Die Cauchysche Ungleichung

Für spätere Abschätzungen benötigen wir folgende Ungleichung: $\varphi(s)$, $s = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ sei eine positive quadratische Form in den Variablen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ und $\varphi(s, t)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$ die dazugehörige bilineare Form. Für beliebige reelle λ gilt dann

$$\varphi(s + \lambda t) = \varphi(s) + 2\lambda\varphi(s, t) + \lambda^2\varphi(t) \geq 0$$

und für die Diskriminante dieser Form die Ungleichung

$$\varphi(s, t)^2 \leq \varphi(s)\,\varphi(t). \tag{5.1}$$

Das Torsionsproblem (T)

Wir betrachten das Randwertproblem (2.8), (2.9)

$$Pu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[f(T^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f(T^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\omega,$$
$$T^2(u) = (\operatorname{grad} u)^2, \quad u|_s = 0. \tag{5.2}$$

$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^0$ bezeichne die Menge der im Gebiet $\Omega + S$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, die auf dem Rande verschwinden. Besitzt $f(\xi^2)$ eine stetige Ableitung, so ist $P(\mathfrak{M}^0)$ offensichtlich eine Teilmenge des Hilbert-Raumes $L_2(\Omega)$ der mit ihrem Quadrat in Ω integrierbaren Funktionen. $\mathfrak{M}^0$ ist dicht in $L_2(\Omega)$, da $\mathfrak{M}^0$ die Menge aller in Ω unendlich oft differenzierbaren Funktionen enthält, die in einem Randstreifen ver-

schwinden. Wir berechnen nun die Ableitung des Operators P unter der Voraussetzung, daß auch $f''(\xi^2)$ stetig ist.

$$P'(u)\,h = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[f[T^2(u)] + 2f'[T^2(u)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial h}{\partial x} + 2f'[T^2(u)]\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[f[T^2(u)] + 2f'[T^2(u)]\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial h}{\partial y} + 2f'[T^2(u)]\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right\}.$$

Daher ist für $h_1, h_2 \in \mathfrak{M}^0$

$$-(P'(u)\,h_1, h_2) = \int_\Omega \left[f[T^2(u)]\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y}\frac{\partial h_2}{\partial y}\right) + 2f'[T^2(u)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)\right] d\Omega. \tag{5.3}$$

Ist die Funktion $f(\xi)$ zweimal stetig differenzierbar und genügt den Bedingungen[4]

$$f(\xi) \geqslant f_0 > 0; \quad f_0 = \text{const}, \qquad f(\xi^2) + 2f'(\xi^2)\,\xi^2 \geqslant \varkappa > 0; \quad \varkappa = \text{const}, \tag{5.4}$$

dann besitzt das Randwertproblem (5.2) eine eindeutig bestimmte verallgemeinerte Lösung im Sinne der Definition 1. Zum Beweis genügt der Nachweis, daß die Bedingungen A, B, D der Sätze 1–4 erfüllt sind. Die Existenz der schwachen Ableitung $P'(x)\,h$, ihre Linearität und Stetigkeit auf $\mathfrak{M}^0$ sind fast offensichtlich, $\mathfrak{M}^0$ ist dicht in $L_2(\Omega)$ und $P(0) = 0$. Die Formel (5.3) zeigt weiterhin, daß die Symmetriebedingung B erfüllt ist. Wir setzen dann in (5.3) $h_1 = h_2 = h$ und bezeichnen mit $f'^{(-)}(T^2) \geqslant 0$, $f'^{(+)}(T^2) \geqslant 0$ den negativen bzw. positiven Teil von $f'(T^2)$. $f'^{(-)}$ und $f'^{(+)}$ sind stetige Funktionen in Ω, wenn u ein festes Element der Menge $\mathfrak{M}^0$ ist. So erhalten wir aus (5.3)

$$-(P'(u)\,h, h) \geqslant \int_\Omega f(T^2)\,(\operatorname{grad} h)^2\,d\Omega - 2\int_\Omega f'^{(-)}(T^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 d\Omega. \tag{5.5}$$

Die Ungleichung (5.1) ergibt für die Form $\varphi(h) = (\operatorname{grad} h)^2$

$$(\operatorname{grad} u \operatorname{grad} h)^2 \leqslant (\operatorname{grad} u)^2\,(\operatorname{grad} h)^2.$$

Mit dieser Abschätzung folgt aus (5.5)

$$-(P'(u)\,h, h) \geqslant \int_\Omega [f(T^2) - 2f'^{(-)}(T^2)\,T^2]\,(\operatorname{grad} h)^2\,d\Omega.$$

$f'^{(-)}(T)$ nimmt lediglich die Werte 0 und $-f'(T^2)$ an; daher folgt aus (5.4)

$$-(P'(u)\,h, h) \geqslant \beta\int_\Omega (\operatorname{grad} h)^2\,d\Omega, \quad \beta = \min(f_0, \varkappa). \tag{5.6}$$

Schließlich gilt für $h \in \mathfrak{M}^0$ die Friedrichssche Ungleichung

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} h)^2\,d\Omega \geqslant \frac{1}{b^2}\int_\Omega h^2\,d\Omega,$$

in der b die Seite des Quadrats bezeichnet, welches das Gebiet Ω einschließt. Damit erhalten wir endgültig

$$-(P'(u)\,h, h) \geqslant \frac{\beta}{b^2}\int_\Omega h^2\,d\Omega = \frac{\beta}{b^2}\,\|h\|^2,$$

also die Bedingung D mit der Konstanten $\gamma^2 = \frac{\beta}{b^2}$.

[4] Die zweite Ungleichung (5.4) läßt sich mit $\Gamma(\xi) = f(\xi^2)\,\xi$ (s. Abb. 1) $\frac{d\Gamma}{d\xi} \geqslant \varkappa > 0$ schreiben.

Abschließend berechnen wir das Funktional

$$\Phi(u) = \int_0^1 (Ptu, u)\,dt + (\omega, u).$$

Für $u \in \mathfrak{M}^0$ findet man

$$(Ptu, u) = -\int_\Omega f(t^2 T^2)\,t\,T^2\,d\Omega.$$

Vertauscht man die Integrationen über t und Ω (die Vertauschung ist möglich, da die Integration über Ω als Multiplikation distributiv und stetig, der Integrand stetig ist), so erhält man

$$-\Phi(u) = \int_\Omega \left[\int_0^1 f(t^2 T^2)\,t\,T^2\,dt - \omega u\right] d\Omega$$

oder

$$-\Phi(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\int_0^{T^2} f(\xi)\,d\xi - \omega\right] d\Omega. \tag{5.7}$$

Das Funktional (5.7) wurde bereits von L. M. Katschanow [1] auf anderem Wege gefunden.

Die stationäre Creep-Deformation einer eingespannten Platte (P).

Identifiziert man die Mittelebene mit dem endlichen Gebiet Ω der xy-Ebene, so stellt die Ausbiegungsgeschwindigkeit der Platte eine Fläche $w(x, y)$ über Ω dar, die der Gleichung $Pw = \frac{1}{D}\,p(x, y)$ (3.9) genügt:

$$Pw \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[g^*(\tilde{H}^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[g^*(\tilde{H}^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[g^*(\tilde{H}^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right] \tag{5.8}$$

$$\tilde{H}^2(w) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^0$ die Menge der in $\Omega + S$ viermal stetig differenzierbaren Funktionen, die auf dem Rand S mit ihren ersten Ableitungen verschwinden; ist $g(\xi^2)$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt offensichtlich $P(\mathfrak{M}) \subset L_2(\Omega)$.

Die weiteren Betrachtungen führen wir im Hilbert-Raum L_2 durch und fordern damit auch für die Belastung der Platte $p(x, y) \in L_2(\Omega)$. Für das Differential $P'(w)\,h$; $w, h \in \mathfrak{M}^0$ erhalten wir den Ausdruck

$$P'(w)\,h = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{g^*[\tilde{H}^2(w)]\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) + 2g^{*\prime}[\tilde{H}^2(w)]\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\tilde{H}^2(w, h)\right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{g^*[\tilde{H}^2(w)]\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) + 2g^{*\prime}[\tilde{H}^2(w)]\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\tilde{H}^2(w, h)\right\} + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left\{g^*[\tilde{H}(w)]\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} + 2g^{*\prime}[\tilde{H}(w)]\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\tilde{H}^2(w, h)\right\},$$

in welchem wir die zu Anfang dieses Abschnittes eingeführte Darstellung bilinearer Formen benutzten

$$\tilde{H}^2(w, h) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

Für $w, h_1, h_2 \in \mathfrak{M}^0$ findet man durch partielle Integration

$$(P'(w)\,h_1, h_2) = \int_\Omega \{g^*[\tilde{H}^2(w)]\,\tilde{H}^2(h_1, h_2) + 2g^{*\prime}[\tilde{H}^2(w)]\,\tilde{H}^2(w, h_1)\,\tilde{H}^2(w, h_2)\}\,d\Omega. \quad (5.9)$$

Ist die Funktion $g^*(\xi^2)$ dreimal stetig differenzierbar und genügt den Bedingungen

$$g^*(\xi^2) > g_0 > 0: \qquad g_0 = \text{const},$$
$$g^*(\xi^2) + 2g^{*\prime}(\xi^2)\,\xi^2 > \varkappa = \text{const}, \quad \varkappa > 0; \quad (5.10)$$

dann besitzt das Randwertproblem (3.9), (3.10) eine eindeutig bestimmte verallgemeinerte Lösung im Sinne der Definition 1.

Der Beweis unterscheidet sich nur unwesentlich von dem des vorigen Beispiels. Wir beweisen daher nur Bedingung D. Nach Einführung der Funktionen $g^{*\prime(+)}[\tilde{H}^2(w)]$ und $g^{*\prime(-)}[\tilde{H}^2(w)]$ erhält man aus (5.9) für $h_1 = h_2 = h$ die Abschätzung

$$(P'(w)\,h, h) > \int_\Omega g^*[\tilde{H}^2(w)]\,\tilde{H}^2(h)\,d\Omega - 2\int_\Omega g^{*\prime(-)}[\tilde{H}^2(w)]\,[\tilde{H}^2(w, h)]^2\,d\Omega$$

und wegen der Ungleichungen (5.1), (5.10)

$$(P'(w)\,h, h) > \beta \int_\Omega \tilde{H}^2(h)\,d\Omega. \quad (5.11)$$

Die Randbedingungen $h]_s = 0$, $\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_s = 0$, $\left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_s = 0$, denen die Elemente von $\mathfrak{M}^0$ genügen, gestatten eine zweimalige Anwendung der FRIEDRICHSschen Ungleichung:

$$\frac{1}{b^4}\int_\Omega h^2\,d\Omega < \frac{1}{b^2}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega < \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)^2\right] d\Omega.$$

Da wegen eben dieser Randbedingungen der Ausdruck

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right] d\Omega$$

verschwindet, so folgt aus (5.11) die gesuchte Abschätzung

$$(P'(w)\,h, h) > \frac{\beta}{b^4}\,\|h\|^2.$$

Wir berechnen nun noch das Funktional (4.3) des zu (3.9), (3.10) äquivalenten Variationsproblems

$$\int_0^1 P(tw, w)\,dt - \frac{1}{D}(p, w) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\int_0^{\tilde{H}^2(w)} g^*(\xi)\,d\xi - \frac{1}{D}\,pw\right] d\Omega. \quad (5.12)$$

Der ebene Deformationszustand (ED)

In der linearen Elastizitätstheorie führen das Plattenproblem, der ebene Deformations- und Spannungszustand auf ein Randwertproblem für die biharmonische Gleichung. In der hier untersuchten Plastizitätstheorie sind die Gleichungen aller dieser Probleme verschieden, weisen jedoch eine gewisse Ähnlichkeit auf, die eine Ähnlichkeit auch in den Ergebnissen erwarten läßt. Wir betrachten die Operatorengleichung

$$Pw \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(T^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[f(T^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[f(T^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] - \Delta[f(T^2)\sigma_z] = \eta(x, y) \quad (5.13)$$

$$T^2(w) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sigma_z\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \sigma_z\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] \quad (5.14)$$

$$\sigma_z = \Delta w\,\frac{f(T^2) - k}{2f(T^2) + k} \quad (5.15)$$

im HILBERT-Raum L_2 der im endlichen Gebiet Ω mit ihrem Quadrat integrierbaren Funktionen. $\mathfrak{M} \subset L_2$ sei die Menge der in $\Omega + S$ viermal stetig differenzierbaren Funktionen und $\mathfrak{M}^0 \subset \mathfrak{M}$ die Teilmenge derjenigen Funktionen aus $\mathfrak{M}$, die mit ihren ersten Ableitungen auf dem Rand S verschwinden. Die Untersuchung der Gleichung (5.13) wird besonders durch den Umstand erschwert, daß der Operator $T^2(w)$ bei der von uns geforderten Allgemeinheit überhaupt nicht explizite angegeben werden kann. Ist die Funktion $f(\xi^2)$ positiv und dreimal stetig differenzierbar, so kann man das Differential $P'(w)\,h$ bilden:

$$P'(w)\,h = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{f[T^2(w)]\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + f'[T^2(w)] \times \frac{d}{dt}[T^2(w + th)]_{t=0}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left\{f[T^2(w)]\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} + f'[T^2(w)] \times \frac{d}{dt}[T^2(w + th)]_{t=0}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{f[T^2(w)]\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + f'[T^2(w)] \times \frac{d}{dt}[T^2(w + th)]_{t=0}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\} - \Delta\left\{\varphi[T^2(w)]\Delta h + \varphi'[T^2(w)]\frac{d}{dt}[T^2(w + th)]_{t=0}\Delta w\right\}$$
$$\varphi(T^2) = f(T^2)\,\frac{f(T^2) - k}{2fT^2) + k}.$$

Hierin errechnet man das Differential $\frac{d}{dt}[T^2(w + th)]_{t=0}$ aus den Relationen (5.14), (5.15); mit der Bezeichnung

$$\psi(T^2) = \frac{\varphi(T^2)}{f(T^2)}$$

finden wir

$$T^2(w_t) = \left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\psi^2[T^2(w_t)](\Delta w_t)^2 - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_t}{\partial y^2} - \frac{1}{3}\psi[T^2(w_t)](\Delta w_t)^2.$$

Wir setzen $w_t = w + th$ und differenzieren nach t

$$\frac{d}{dt}[T^2(w_t)] = 2\frac{\partial^2 w_t}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 w_t}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{2}{3}\psi[T^2(w_t)](\Delta w_t)^2\psi'[T^2(w_t)]\frac{d}{dt}[T^2(w_t)] + \frac{2}{3}\psi^2[T^2(w_t)]\Delta w_t\Delta h - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 w_t}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 w_t}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{3}\psi'[T^2(w_t)](\Delta w_t)^2\frac{d}{dt}[T^2(w_t)] - \frac{2}{3}\psi[T^2(w_t)]\Delta w_t\Delta h.$$

Für $t=0$ erhalten wir nach Gruppierung der entsprechenden Glieder

$$\frac{d}{dt}[T^2(w+th)]_{t=0}\left[1-\frac{2}{3}\psi[T^2(w)](\Delta w)^2\psi'[T^2(w)]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\psi'[T^2(w)](\Delta w)^2\right]=$$
$$=2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}+\frac{2}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{2}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\times$$
$$\times\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{2}{3}(\psi^2[T^2(w)]-\psi[T^2(w)])\Delta w\Delta h$$

$$\psi^2-\psi=\frac{2k^2-f^2[T^2(w)]-kf[T^2(w)]}{(2f[T^2(w)]+k)^2}$$

oder

$$\frac{d}{dt}[T^2(w+th)]_{t=0}=\frac{D(w)h}{G(w)}$$

$$D(w)h=2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}+\frac{2}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{2}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+$$
$$+\frac{2}{3}\frac{2k^2-f^2[T^2(w)]-kf[T^2(w)]}{(2f[T^2(w)]+k)^2}\Delta w\Delta h$$

$$G(w)=1+\frac{1}{3}\{\psi'[T^2(w)]-2\psi[T^2(w)]\psi'[T^2(w)]\}(\Delta w)^2=$$
$$=1+3\frac{k^2f'[T^2(w)]}{(2f[T^2(w)]+k)^3}(\Delta w)^2$$

Für $f'(T^2)>0$ können wir das innere Produkt

$$(P'(w)h_1,h_2),\qquad w\in\mathfrak{M}\quad\text{und}\quad h_1,h_2\in\mathfrak{M}^0$$

bilden:

$$(P'(w)h_1,h_2)=\int_\Omega f[T^2(w)]\left[\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 h_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 h_1}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2}\right]d\Omega+$$
$$+\int_\Omega\left\{f'[T^2(w)]\frac{D(w)h_1}{G(w)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}+\right.\right.$$
$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 h_2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2}\Big]-$$
$$-\varphi[T^2(w)]\Delta h_1\Delta h_2-$$
$$\left.-\varphi'[T^2(w)]\frac{D(w)h_1}{G(w)}\Delta w\Delta h_2\right\}.$$

Mit den Ausdrücken

$$\varphi(T^2)=\frac{f(T^2)-k}{2f(T^2)+k}f(T^2);$$
$$\varphi'(T^2)=\frac{2f^2(T^2)+2kf(T^2)-k^2}{(2f(T^2)+k)^2}f'(T^2)$$

erhält man nach einfachen Umformungen

$$(P'(w)h_1,h_2)=\int_\Omega f[T^2(w)]\left[\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 h_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 h_2}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$+\frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2}-$$
$$\left.-\frac{f[T^2(w)]-k}{2f[T^2(w)]+k}\Delta h_1\Delta h_2\right]d\Omega+$$
$$+\int_\Omega f'[T^2(w)]\frac{D(w)h_1}{G(w)}\left[2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 h_2}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$+\frac{2}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}+\frac{2}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\right.$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)\frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2}+$$
$$\left.+\frac{2}{3}\frac{2k^2-f^2[T^2(w)]-kf[T^2(w)]}{(2f[T^2(w)]+k)^2}\Delta w\Delta h_2\right]d\Omega$$

oder

$$(P'(w)h_1,h_2)=\int_\Omega f[T^2(w)]\left[\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 h_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 h_2}{\partial x\,\partial y}+\right.$$
$$+\frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}\frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2}-$$
$$\left.-\frac{f[T^2(w)]-k}{2f[T^2(w)]+k}\Delta h_1\Delta h_2\right]d\Omega+$$
$$+\int_\Omega\frac{f'[T^2(w)]}{G(w)}D(w)h_1D(w)h_2d\Omega \tag{5.16}$$

Ist die Funktion $f(\xi^2)$ dreimal stetig differenzierbar und genügt den Bedingungen

$$f(\xi^2)\geqslant f_0>0;\ f'(\xi^2)\geqslant 0 \tag{5.17}$$

so besitzt das Randwertproblem (2.10), (2.11), (2.12) eine eindeutig bestimmte verallgemeinerte Lösung im Sinne der Definition 1, falls überhaupt eine in $\Omega+S$ viermal stetig differenzierbare Funktion existiert, die die Randwerte (2.12) annimmt.

Beweis:

Wenn $v\in\mathfrak{M}$ diejenige Funktion ist, deren Randwerte den Bedingungen (2.12) genügen, so stellen wir die Lösung U in der Form $U=v+w$ dar und verfahren weiter wie bei der Lösung des Problems (4.1), (4.7). Es genügt demnach zu zeigen, daß die Bedingungen A, B, D der Sätze 1–4 für den Operator (2.11) erfüllt sind. A und B folgen unmittelbar aus den angegebenen Formeln, wir beweisen nur D.

Wenn wir in (5.16) $h_1=h_2=h$ setzen und die Ungleichungen

$$f(T^2)\geqslant f_0,\ f'(T^2)\geqslant 0,\ G(w)\geqslant 1$$

und

$$\frac{f(T^2)-k}{2f(T^2)+k}<1$$

berücksichtigen, so erhalten wir die Abschätzung

$$(P'(w)h,h)>f_0\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)^2-\frac{1}{2}(\Delta h)^2\right]d\Omega.$$

Da auf $\mathfrak{M}^0$ wieder die Relation

$$\int_\Omega\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]d\Omega=0$$

besteht, findet man ähnlich wie im Plattenproblem

$$(P'(w)h,h)\geqslant\frac{f_0}{2b^4}\|h\|^2.$$

Das dem Randwertproblem (2.10), (2.11), (2.12) äquivalente Variationsproblem lautet

$$\int_0^1(P(v+tw),w)\,dt=\text{Minimum}\quad w\in\mathfrak{M}^0$$

$$(P(v+tw),w)=\int_\Omega f[T^2(v+tw)]\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\right.$$
$$+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-$$
$$\left.-\frac{f[T^2(v+tw)]-k}{2f[T^2(v+tw)]+k}\Delta v\Delta w\right\}d\Omega+ \tag{5.18}$$
$$+\int_\Omega f[T^2(v+tw)]\,t\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y}\right)^2-\frac{f[T^2(v+tw)]-k}{2f[T^2(v+tw)]+k}(\Delta w)^2\right\}d\Omega.$$

Der ebene Spannungszustand (ES)

Wir betrachten die Operatorengleichung

$$P w \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(T^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[f(T^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[f(T^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + k\Delta^2 w - \frac{1}{3}\Delta[f(T^2)\Delta w] = \zeta(x, y) \tag{5.19}$$

$$T^2 = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

auf der Menge $\mathfrak{M}$ der in $\Omega + S$ viermal stetig differenzierbaren Funktionen. $\mathfrak{M}^0 \in \mathfrak{M}$ sei wieder die Teilmenge derjenigen Funktionen von $\mathfrak{M}$, die mit ihren ersten Ableitungen auf dem Rande verschwinden; die Funktion $f(\xi^2)$ besitze drei stetige Ableitungen wir finden dann für $w \in \mathfrak{M}$, $h \in \mathfrak{M}^0$

$$\begin{aligned} P'(w)h = {} & \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{f[T^2(w)]\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2f'[T^2 w)]\,T^2(w, h)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} + \\ & + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left\{f[T^2(w)]\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} + 2f'[T^2(w)]T^2(w,h)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right\} + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{f[T^2(w)]\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + 2f'[T^2(w)]\,T^2(w, h)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\} + \\ & + k\Delta^2 h - \frac{1}{3}\Delta\{f[T^2(w)]\Delta h + 2f'[T^2(w)]\Delta w\,T^2(w, h)\}, \end{aligned}$$

wobei $T^2(w, h)$ wieder die der quadratischen Form $T^2(w)$ entsprechende bilineare Form darstellt. Durch partielle Integration findet man für $w \in \mathfrak{M}$, h_1, $h_2 \in \mathfrak{M}^0$

$$\begin{aligned} (P'(w)h_1, h_2) = \int_\Omega \{ & 2f[T^2(w)]\,T^2(h_1, h_2) + \\ & + 4f'[T^2(w)]\,T^2(w, h_1)\,T^2(w, h_2) + \\ & + k\Delta h_1, \Delta h_2\}\,d\Omega. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Ist die Funktion $f(\xi^2)$ dreimal stetig differenzierbar und genügt den Bedingungen

$$\begin{aligned} & f(\xi)^2 > 0 \\ & f(\xi^2) + 2f'(\xi^2)\,\xi^2 \geqslant 0, \end{aligned} \tag{5.21}$$

dann besitzt das Problem des ebenen Spannungszustandes (2.13), (2.14) eine eindeutig bestimmte verallgemeinerte Lösung im Sinne der Definition 1, falls überhaupt eine in $\Omega + S$ viermal stetig differenzierbare Funktion existiert, die die Randwerte (2.14) annimmt.

Wie in den vorhergehenden Beispielen beweisen wir lediglich die Bedingung D.

Führt man wieder die Funktionen

$$f'^{(+)}[T^2(w)] > 0 \quad \text{und} \quad f'^{(-)}[T^2(w)] > 0$$

ein, so folgt aus (5.20) unter Berücksichtigung von (5.1) die Abschätzung

$$\begin{aligned} (P'(w)h, h) \geqslant \int_\Omega [\{ & f[T^2(w)] - \\ & - 2f'^{(-)}[T^2(w)]\,T^2(w)\}\,T^2(h) + k(\Delta h)^2]\,d\Omega. \end{aligned}$$

Wegen der Bedingungen (5.21) ist der Ausdruck in den geschweiften Klammern nicht negativ. Wie in den vorangegangenen Beispielen erhält man die Ungleichung

$$(P'(w)h, h) \geqslant \frac{k}{b^4}\|h\|^2.$$

Das Funktional (4.3) lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} \int_0^1 (P(v + tw), w)\,dt = \int_0^1 dt \int_\Omega \{ & f[T^2(v + tw)]\,2T^2(v + tw, w) \\ & + k\Delta(v + tw)\,\Delta w\}\,d\Omega. \end{aligned}$$

Nach Vertauschung der Integration über t und Ω findet man unter Berücksichtigung der Relation

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}[T^2(v + tw)] = 2T^2(v + tw, w) \\ & \int_0^1 (P(v + tw), w)\,dt = \int_\Omega \left[\int_{T^2(v)}^{T^2(v+w)} f(\xi)\,d\xi + k\Delta\left(v + \frac{1}{2}w\right)\Delta w\right] d\Omega. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Das elastisch-plastische Gleichgewicht eines dreidimensionalen endlichen Körpers (R), (RC)

Im dreidimensionalen Gebiet Ω, welches wir mit dem elastisch-plastischen Körper identifizieren, betrachten wir die Menge $\mathfrak{M}$ von Verschiebungsvektoren $u = (u_1, u_2, u_3)$, deren Komponenten in $\Omega + S$ zwei stetige Ableitungen besitzen. Sind $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathfrak{M}$ zwei Verschiebungsvektoren, so erklären wir das Produkt

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_\Omega (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)\,d\Omega.$$

Dadurch wird $\mathfrak{M}$ in den HILBERT-Raum der in Ω mit ihrem Quadrat integrierbaren Vektorfunktionen eingebettet. Auf $\mathfrak{M}$ ist der Operator $\vec{P}\vec{u}$ des Gleichungssystems (2.5) erklärt. Wir berechnen sein Differential unter der Voraussetzung, daß die Funktion $g(\xi^2)$ zwei stetige Ableitungen besitzt:

$$\vec{P}' = (P_x', P_y', P_z')$$

$$\begin{aligned} P_x'(\vec{u})\vec{h} = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left\{4g[E^2(\vec{u})]\frac{\partial h_1}{\partial x} + 8g'[E^2(\vec{u})]\,E^2(\vec{u}, \vec{h})\frac{\partial u_1}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - 4g[E^2(\vec{u})]\right)\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial h_3}{\partial z}\right) - \\ & - \frac{8}{3}g'[E^2(\vec{u})]\,E^2(\vec{u}, \vec{h})\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\Big\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left\{2g[E^2(\vec{u})]\left(\frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y}\right) + \right. \\ & \left. + 4g'[E^2(\vec{u})]\,E^2(\vec{u}, \vec{h})\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial z}\left\{2g[E^2(\vec{u})]\left(\frac{\partial h_3}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial z}\right) + \right. \\ & \left. + 4g'[E^2(\vec{u})]\,E^2(\vec{u}, \vec{h})\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_y'(\vec{u})\vec{h} = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left\{2g[E^2(\vec{u})]\left(\frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y}\right) + \right. \\ & \left. + 4g'[E^2(\vec{u})]\,E(\vec{u}, \vec{h})\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left\{4g[E^2(\vec{u})]\frac{\partial h_2}{\partial y} + 8g'[E^2(\vec{u})]\,E^2(\vec{u}, \vec{h})\frac{\partial u_2}{\partial y} + \right. \\ & + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - 4g[E^2(\vec{u})]\right)\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial h_3}{\partial z}\right) - \\ & - \frac{8}{3}g'[E^2(\vec{u})]\,E(\vec{u}, \vec{h})\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\Big\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial z}\left\{2g[E^2(\vec{u})]\left(\frac{\partial h_3}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial z}\right) + \right. \\ & \left. + 4g'[E^2(\vec{u})]\,E^2(\vec{u}, \vec{h})\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_z'(\vec{u})\vec{h} = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left\{2g[E^2(\vec{u})]\left(\frac{\partial h_3}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial z}\right) + \right. \\ & \left. + 4g'[E^2(\vec{u})]\,E^2(\vec{u}, \vec{h})\left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left\{2g[E^2(\vec{u})]\left(\frac{\partial h_3}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial z}\right) + \right. \\ & + \frac{8}{3}g'[E^2(\vec{u})]\,E^2(\vec{u}, \vec{h})\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\Big\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial z}\left\{4g[E^2(\vec{u})]\frac{\partial h_3}{\partial z} + 8g'[E^2(\vec{u})]\,E^2(\vec{u}, \vec{h})\frac{\partial u_3}{\partial z} + \right. \\ & + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - 4g[E^2(\vec{u})]\right)\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial h_3}{\partial z}\right) - \\ & \left. - \frac{8}{3}g'[E^2(\vec{u})]\,E^2(\vec{u}, \vec{h})\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Hierin ist

$$E^2(\vec{u},\vec{h}) = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial h_2}{\partial x}+\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)+ \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial h_3}{\partial x}+\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)+ \left(\frac{\partial u_3}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h_2}{\partial z}\right)+ +\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}-\frac{\partial h_2}{\partial y}\right)+ \left(\frac{\partial u_2}{\partial y}-\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial h_2}{\partial y}-\frac{\partial h_3}{\partial z}\right)+ \left(\frac{\partial u_3}{\partial z}-\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial h_3}{\partial z}-\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)\right].$$

Das Produkt

$$\left(\vec{P}'(\vec{u})\,\vec{h},\vec{\hat{h}}\right)=\int_{\Omega}\left(P_x'(\vec{u})\,\vec{h}\,\hat{h}_1+P_y'(\vec{u})\,\vec{h}\,\hat{h}_2+P_z'(\vec{u})\,\vec{h}\,\hat{h}_3\right)d\Omega$$

berechnen wir zunächst für $\vec{u},\ \vec{h},\ \vec{\hat{h}}\in\mathfrak{M}$

$$-\left(\vec{P}'(\vec{u})\,\vec{h},\vec{\hat{h}}\right)=\int_{\Omega}\Bigg\{2g[E^2(\vec{w})]\,E^2\left(\vec{h},\vec{\hat{h}}\right)+ +4g'[E^2(\vec{u})]\,E^2(\vec{u},h)\,E^2\left(\vec{u},\vec{\hat{h}}\right)+ +\frac{1}{3k}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}+\frac{\partial h_2}{\partial y}+\frac{\partial h_3}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \hat{h}_1}{\partial x}+\frac{\partial \hat{h}_2}{\partial y}+\frac{\partial \hat{h}_3}{\partial z}\right)\Bigg\}d\Omega- -\int_S 4g[E^2(\vec{u})]\Bigg\{\Bigg[\frac{\partial h_1}{\partial x}\cos nx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial x}+\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\cos ny+ +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_3}{\partial x}+\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)\cos nz\Bigg]\hat{h}_1+ +\Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial x}+\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\cos nx+\frac{\partial h_2}{\partial y}\cos ny+ +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_3}{\partial y}+\frac{\partial h_2}{\partial z}\right)\cos nz\Bigg]\hat{h}_2+ +\Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_3}{\partial x}+\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)\cos nx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_3}{\partial y}+\frac{\partial h_2}{\partial z}\right)\cos ny+ +\frac{\partial h_3}{\partial z}\cos nz\Bigg]\hat{h}_3\Bigg\}ds-\int_S 8g'[E^2(\vec{u})]\,E^2(\vec{u},\vec{h})\times \times\Bigg\{\Bigg[\frac{\partial u_1}{\partial x}\cos nx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\cos ny+ +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\cos nz\Bigg]\hat{h}_1+ +\Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\cos nx+\frac{\partial u_2}{\partial y}\cos ny+ +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\cos nz\Bigg]\hat{h}_2+ +\Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\cos nx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\cos ny+ +\frac{\partial u_3}{\partial z}\cos nz\Bigg]\hat{h}_3\Bigg\}ds-\frac{1}{3}\int_S\Bigg\{\frac{1}{k}-4g[E^2(\vec{u})]\times \times\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}+\frac{\partial h_2}{\partial y}+\frac{\partial h_3}{\partial z}\right)-8g'[E^2(\vec{u})]\times \times\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\Bigg\}(\hat{h}_1\cos nx+\hat{h}_2\cos ny+\hat{h}_3\cos nz)ds. \tag{5.23}$$

Wir betrachten zwei Randwertprobleme für die Gleichung $-\vec{P}(\vec{u})=\vec{K}$. Zur Untersuchung des ersten Randwertproblems (2.5), (2.6) wählen wir die Menge $\mathfrak{M}^0\subset\mathfrak{M}$ der auf dem Rande S verschwindenden Funktionen aus $\mathfrak{M}$. In diesem Fall verschwinden für $\vec{h},\ \vec{\hat{h}}\in\mathfrak{M}^0$ in der Formel (5.23) die Integrale über den Rand S. Diese Integrale verschwinden auch auf der Menge $\tilde{\mathfrak{M}}^0$ des folgenden gemischten Randwertproblems: Die Menge S der Randpunkte von Ω bilden zwei ein- oder mehrfach zusammenhängende Teilgebiete S_1 und S_2, mes $S_1>0$. Für $\vec{h}\in\tilde{\mathfrak{M}}^0\subset\mathfrak{M}$ gelte

$$\vec{h}=0 \quad \text{auf} \quad S_1 \tag{5.24}$$

und

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}\cos nx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial x}+\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\cos ny+ +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_3}{\partial x}+\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)\cos nz=0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial x}+\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)\cos nx+\frac{\partial h_2}{\partial y}\cos ny+ +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_3}{\partial y}+\frac{\partial h_2}{\partial z}\right)\cos nz=0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_3}{\partial x}+\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)\cos nx+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_3}{\partial y}+\frac{\partial h_2}{\partial z}\right)\cos ny+ +\frac{\partial h_3}{\partial z}\cos nz=0 \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}+\frac{\partial h_2}{\partial x}+\frac{\partial h_3}{\partial z}=0 \quad \text{auf} \quad S_2.$$

Multipliziert man die ersten drei Gleichungen in (5.25) mit $g[E^2(\vec{h})]$, so erhält man unter Berücksichtigung der vierten Gleichung und des Plastizitätsgesetzes (2.4) die Gleichung $\vec{Q}(\vec{h})=0$, einen Spezialfall des Randwertproblems (2.5), (2.7). Dieses gemischte Randwertproblem für die Gleichung $-\vec{P}(\vec{u})=\vec{K}$ entspricht dem CREEP-Problem für einen dreidimensionalen Körper; auf einem Teil der Oberfläche verschwinden die Oberflächenkräfte, auf dem anderen sind die Verschiebungen vorgegeben. Während auf die Verschiebungen das Homogenisierungsprinzip (Abschn. IV) angewandt werden kann, ist die Homogenität der Bedingungen (5.25) wesentlich, da nur in diesem Fall die Randbedingungen (2.7) linearisiert werden können (die Inkompressibilität vorausgesetzt). Den Bedingungen (5.24), (5.25) entspricht z. B. das Problem der CREEP-Deformation eines schweren Körpers auf starrer Unterlage, schematisch in Abb. 2 dargestellt.

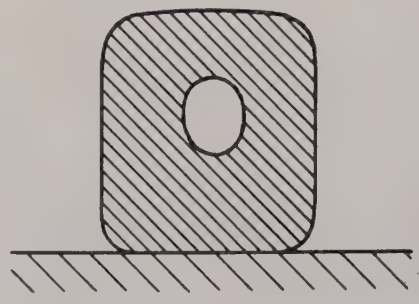

Abb. 2

In beiden von uns untersuchten Problemen gilt die Formel

$$-\left(\vec{P}(\vec{u})\,\vec{h},\vec{\hat{h}}\right)=\int_{\Omega}\Bigg\{2g[E^2(\vec{u})]\,E^2\left(\vec{h},\vec{\hat{h}}\right)+ +4g'[E^2(\vec{u})]\,E^2(\vec{u},\vec{h})\,E^2\left(\vec{u},\vec{\hat{h}}\right)+ +\frac{1}{3k}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}+\frac{\partial h_2}{\partial y}+\frac{\partial h_3}{\partial z}\right)\times \times\left(\frac{\partial \hat{h}_1}{\partial x}+\frac{\partial \hat{h}_2}{\partial y}+\frac{\partial \hat{h}_3}{\partial z}\right)\Bigg\}d\Omega \tag{5.26}$$

$-\vec{A}\vec{u}$ bezeichne den Operator der linearen Elastizitätstheorie:

$$\begin{aligned} A_x\vec{u} &= \frac{\partial \sigma_x^e}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^e}{\partial z} \\ A_y\vec{u} &= \frac{\partial \tau_{xy}^e}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^e}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^e}{\partial z} \\ A_z\vec{u} &= \frac{\partial \tau_{xz}^e}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^e}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^e}{\partial z} \end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^e &= \lambda\varepsilon + 2G\varepsilon_x & \tau_{xy}^e &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y^e &= \lambda\varepsilon + 2G\varepsilon_y & \tau_{xz}^e &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_z^e &= \lambda\varepsilon + 2G\varepsilon_z & \tau_{yz}^e &= G\gamma_{yz} \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\lambda = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{k} - 2G\right] = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}.$$

In der Elastizitätstheorie wird bewiesen, daß dieser Operator auf den Mengen $\mathfrak{M}^0$ und $\tilde{\mathfrak{M}}^0$ positiv definit ist [7]

$$-(\vec{A}\vec{h}, \vec{h}) = \int_\Omega \left[G E^2(\vec{h}) + \frac{1}{3k}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial h_3}{\partial z}\right)^2\right] d\Omega > \gamma^2 \|\vec{h}\|^2 \tag{5.29}$$

für $h \in \mathfrak{M}^0$ bzw. $h \in \tilde{\mathfrak{M}}^0$.

Setzt man daher voraus, daß die Funktion $g(\xi^2)$ den Ungleichungen

$$\begin{aligned} &g(\xi)^2 \geqslant g_0 > 0 && g_0 = \text{const.} \\ &g(\xi^2) + 2g'(\xi^2)\,\xi^2 \geqslant \varkappa > 0, && \varkappa = \text{const.} \end{aligned} \tag{5.30}$$

genügt, so erhält man aus (5.26)

$$-(\vec{P}'\vec{h}, \vec{h}) > \frac{-\beta}{G}(\vec{A}\vec{h}, \vec{h}) > \frac{\beta\gamma^2}{G}\|\vec{h}\|^2. \tag{5.31}$$

Ist die Funktion $g(\xi^2)$ zweimal stetig differenzierbar und genügt den Bedingungen (5.30), so existieren verallgemeinerte Lösungen im Sinne der Definition 1

1. des ersten Randwertproblems $\vec{u}|_s = \vec{\varphi}(s)$ für elastisch-plastische Körper
2. des gemischten Randwertproblems

$$\vec{u}|_{s_1} = \vec{\varphi}_1(s) \qquad \vec{Q}(\vec{u})|_{s_2} = 0$$

für stationäre CREEP-Deformationen eines elastisch-plastischen Körpers,

falls ein Verschiebungsvektor $\vec{v} \in \mathfrak{M}$ existiert, der die Randwerte $\vec{v}|_s = \vec{\varphi}(s)$ bzw $\vec{v}|_{s_1} = \vec{\varphi}_1(s)$ und (5.25) annimmt.

Mit Hilfe des Homogenisierungsprinzips (Abschn. IV) und der Formeln (5.23), (5.26), (5.31) läßt sich der Beweis unschwer durchführen. Ist $\vec{v} \in \mathfrak{M}$ diejenige Funktion, die die Randbedingungen

$$\vec{v}|_s = \vec{\varphi}(s) \quad \text{bzw.} \quad \vec{v}|_{s_1} = \vec{\varphi}_1(s); \tag{5.25}$$

erfüllt und $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, so finden wir

$$\begin{aligned} &-\int_0^1 (P(\vec{v} + t\vec{w}), \vec{w})\, dt = \\ &= \int_0^1 dt \int_\Omega 2g[E^2(\vec{v} + t\vec{w})]\, E^2(\vec{v} + t\vec{w}, \vec{w})\, d\Omega + \\ &+ \frac{1}{3k}\int_0^1 dt \int_\Omega \left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}(v_1 + tw_1) + \frac{\partial}{\partial y}(v_2 + tw_2) + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{\partial}{\partial z}(v_3 + tw_3)\right]\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z}\right)\right\} d\Omega. \end{aligned}$$

Nach Vertauschung der Integrale ergibt sich wegen

$$\frac{d}{dt} E^2(\vec{v} + t\vec{w}) = 2E^2(\vec{v} + t\vec{w}, \vec{w})$$

$$\begin{aligned} &-\int_0^1 (P(\vec{v} + t\vec{w})\vec{w})\, dt = \int_\Omega \int_{E^2(\vec{v})}^{E^2(\vec{v}+\vec{w})} g(\xi)\, d\xi\, d\Omega + \\ &+ \frac{1}{6k}\int_\Omega \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z}\right)^2 d\Omega + \\ &+ \frac{1}{3k}\int_\Omega \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) \times \\ &\times \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z}\right) d\Omega. \end{aligned} \tag{5.32}$$

VI. Die Stetigkeitseigenschaften verallgemeinerter Lösungen und ihrer Ableitungen

Die verallgemeinerte Lösung der Gleichung $Pu = f$ wurde durch eine Minimalfolge des Funktionals $\Phi(u) = \int_0^1 (Ptu, u)_H dt - (u, f)_H$ erklärt. Die Sätze 1—4 garantieren die Konvergenz der Minimalfolgen in H und die Eindeutigkeit des Grenzwertes. Dieser Grenzwert braucht dem Definitionsgebiet des Operators P nicht anzugehören und soll daher durch die folgenden Ausführungen näher beschrieben werden; wir setzen $H = L_2(\Omega)$, Ω sei ein endliches zwei- oder dreidimensionales Gebiet mit der Grenze S, und betrachten das Funktional

$$\Phi_0(u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \int_0^{\tau_i^2(u)} \varrho_i(\xi)\, d\xi\, d\Omega + \int_\Omega qu\, d\Omega \tag{6.1}$$

auf der Menge $\mathfrak{N} \subset L_2(\Omega)$.

Hilfssatz 1. Es gelte $\varrho_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$

und
$$\int_\Omega \tau_j^2(u)\, d\Omega \geqslant \gamma^2 \int_\Omega u^2 d\Omega, \tag{6.2}$$

$$\varrho_j(\xi) \geqslant \varrho_0 > 0, \quad \varrho_0 = \text{const} \tag{6.3}$$

wenigstens für ein $j \in (1, \ldots, m)$ und $u \in \mathfrak{N}$.

Dann existiert eine untere Schranke für $\Phi_0(u)$ auf $\mathfrak{N}$.

Beweis:

Wir setzen $\varrho_j(\xi) = \varphi_j(\xi) + \varrho_0$; $\varphi_j(\xi) = \varrho_j(\xi) - \varrho_0 \geqslant 0$. b sei eine positive im Augenblick willkürliche Konstante und

$$b\Phi_0 = \Phi_1;\ b\varphi_j = \varphi_{j,1};\ b\varrho_i = \varrho_{i,1}, \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Dann gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\geqslant \int_\Omega \sum_i \int_0^{\tau_i^2} \varrho_{i,1}(\xi)\, d\xi\, d\Omega - b\|q\|\,\|u\| \geqslant \\ &\geqslant \int_\Omega \sum_i \int_0^{\tau_i^2} \varrho_{i,1}(\xi)\, d\xi\, d\Omega - \frac{b^2}{2}\|q\|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2\, d\Omega \geqslant \\ &\geqslant \int_\Omega \int_0^{\tau_j^2} \varrho_{j,1}(\xi)\, d\xi\, d\Omega - \frac{1}{2\gamma^2}\int_\Omega \tau_{j,1}^2\, d\Omega - \frac{b^2}{2}\|q\|^2 = \\ &= \int_\Omega \int_0^{\tau_j^2} \left[\varrho_{j,1}(\xi) - \frac{1}{2\gamma^2}\right] d\xi\, d\Omega - \frac{b^2\|q\|^2}{2} = \\ &= \int_\Omega \int_0^{\tau_j^2} \left[\varphi_{j,1}(\xi) + b\varrho_0 - \frac{1}{2\gamma^2}\right] d\xi\, d\Omega - \frac{b^2\|q\|^2}{2}. \end{aligned}$$

Wir wählen nun $b = \frac{1}{\gamma^2 \varrho_0}$ und erhalten die gesuchte Abschätzung

$$\Phi_0(u) \geq \frac{1}{\gamma^2} \int_{\Omega} \int_0^{\tau_j^2} \left[\frac{1}{\varrho_0} \varphi_j(\xi) + \frac{1}{2} \right] d\xi \, d\Omega - \frac{1}{2\gamma^4 \varrho_0^2} \|q\|^2 >$$

$$> -\frac{1}{2\gamma^4 \varrho_0^2} \|q\|^2. \tag{6.4}$$

Auf $\mathfrak{R}$ existiert also eine Minimalfolge des Funktionals $\Phi_0(u)$; wir bezeichnen sie des weiteren mit $\{u_n\}$. Für die Glieder dieser Folge leiten wir eine weitere Abschätzung her.

$$\Phi_0(u_n) \geq \int_{\Omega} \int_0^{\tau_j^2(u_n)} \varrho_j(\xi) \, d\xi \, d\Omega - \left| \int_{\Omega} q u_n \, d\Omega \right| \geq$$

$$\geq \int_{\Omega} \int_0^{\tau_j^2(u_n)} \varrho_j(\xi) \, d\xi \, d\Omega - \|q\| \, \|u_n\|.$$

Wegen der Bedingungen (6.2), (6.3) gilt

$$\varrho_0 \gamma^2 \|u_n\|^2 \leq \varrho_0 \int_{\Omega} \tau_j^2(u_n) \, d\Omega \leq \int_{\Omega} \int_0^{\tau_j^2(u_n)} \varrho_j(\xi) \, d\xi \, d\Omega \tag{6.5}$$

und daher

$$\Phi_0(u_n) \geq \int_{\Omega} \int_0^{\tau_j^2(u_n)} \varrho_j(\xi) \, d\xi \, d\Omega - \frac{\|q\|}{\gamma \sqrt{\varrho_0}} \sqrt{\int_{\Omega} \int_0^{\tau_j^2(u_n)} \varrho_j(\xi) \, d\xi \, d\Omega}.$$

Angenommen, es gilt die Bedingung

$$\Phi_0(0) = 0; \tag{6.6}$$

dann können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen.

$$\int_{\Omega} \int_0^{\tau_j^2(u_n)} \varrho_j(\xi) \, d\xi \, d\Omega \leq \frac{\|q\|^2}{\gamma^2 \varrho_0} \tag{6.7}$$

Definition 2

Die für $(-\infty < u < +\infty)$ erklärte Funktion $M(u)$ nennen wir nach Orlicz eine N'-Funktion, wenn sie die Darstellung

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) \, dt \tag{6.8}$$

besitzt und die rechtsseitig stetige, nichtfallende Funktion $p(t)$, $0 \leq t < \infty$ den Bedingungen

$\alpha)$ $p(t) > 0$ für $t > 0$; $p(0) = p(+0) = 0$

$\beta)$ $\lim\limits_{t \to \infty} p(t) = \infty$

genügt. Erklärt man die Funktion $q(s) = \sup\limits_{p(t) \leq s} t$, so ist auch $N(v) = \int_0^{|v|} q(s) \, ds$ eine N'-Funktion, sie heißt die zu $M(u)$ komplementäre Funktion. Für Funktionen $u(x)$ $x \in \Omega$ führt man eine Norm ein:

$$\|u\|_M = \sup \left| \int_{\Omega} u(x) \, v(x) \, d\Omega \right|, \tag{6.9}$$

wobei sich das Supremum über diejenigen Funktionen $v(x)$ erstreckt, die der Bedingung $\int_{\Omega} N[v(x)] \, d\Omega \leq 1$ genügen. Die den N'-Funktionen $M(u)$ und $N(v)$ entsprechenden Banach-Räume nennen wir L_M und L_N. Mit $E_M \subset L_M$ bezeichnen wir den Unterraum der in der Metrik (6.9) vervollständigten Menge der in Ω beschränkten Funktionen.

Setzen wir nun $p(t) = 2 \varrho_j(t^2) t$, so ist

$$M_j(\tau) = \int_0^{\tau^2} \varrho_j(\xi) \, d\xi$$

für rechtsseitig stetige, nichtfallende und nichtnegative $\varrho_j(\xi)$, $\xi > 0$ eine N'-Funktion.

Die Ungleichung (6.7) läßt sich dann in der Form

$$\int_{\Omega} M_j[\tau_j(u_n)] \, d\Omega < \frac{\|q\|^2}{\gamma^2 \varrho_0} \tag{6.10}$$

darstellen.

Definition 3

$M(u)$ sei eine N'-Funktion. Die Folge $\{\tau_n(x)\}$ heiße mit $M(\tau)$ schwach konvergent gegen $\tau(x)$, $x \in \Omega$, wenn die Folge

$$\int_{\Omega} \tau_n(x) \, h(x) \, d\Omega \qquad n = 1, 2, \ldots$$

für jedes $h(x) \in E_N$ gegen $\int_{\Omega} \tau(x) \, h(x) \, d\Omega$ konvergiert.

Satz 5

$M(\tau)$ sei eine N'-Funktion. Ist die Folge $\{\tau_n(x)\}$ mit $M(\tau)$ schwach konvergent gegen $\tau(x)$, so besteht die Ungleichung

$$\int_{\Omega} M[\tau(x)] \, d\Omega \leq \varliminf_{n \to \infty} \int_{\Omega} M[\tau_n(x)] \, d\Omega. \tag{6.11}$$

Beweis:

Ist $N(v)$ die zu $M(\tau)$ komplementäre Funktion, so hat man für jedes beschränkte $h(x)$

$$\int_{\Omega} \tau_n(x) \, h(x) \, d\Omega \leq \int_{\Omega} M[\tau_n(x)] \, d\Omega + \int_{\Omega} N[h(x)] \, d\Omega \tag{6.12}$$

und für $n \to \infty$

$$\int_{\Omega} \tau(x) \, h(x) \, d\Omega \leq \varliminf_{n \to \infty} \int_{\Omega} M[\tau_n(x)] \, d\Omega + \int_{\Omega} N[h(x)] \, d\Omega. \tag{6.13}$$

Wir definieren
$\varphi_{n_1}(x) = \tau(x)$ für diejenigen x, für welche $|\tau(x)| \leq n_1$ ist
$\varphi_{n_1}(x) = n_1 \operatorname{sign} \tau(x)$ für die übrigen $x \in \Omega$,
dann folgt aus (6.13) für $\operatorname{sign} h(x) = \operatorname{sign} \tau(x)$

$$\int_{\Omega} |\varphi_{n_1}(x)| \, |h(x)| \, d\Omega \leq \varliminf_{n \to \infty} \int_{\Omega} M[\tau(x)] d\Omega + \int_{\Omega} N[h(x)] d\Omega. \tag{6.14}$$

Setzt man

$$h_{n_1}(x) = p[|\varphi_{n_1}(x)|] \operatorname{sign} \tau(x),$$

wenn $\int_0^{|\tau|} p(t) \, dt$ die Darstellung der N'-Funktion $M(\tau)$ ist, so erhält man als Spezialfall der Youngschen Ungleichung

$$\int_{\Omega} |\varphi_{n_1}(x)| \, |h_{n_1}(x)| \, d\Omega = \int_{\Omega} M[\varphi_{n_1}(x)] \, d\Omega + \int_{\Omega} N[h_{n_1}(x)] \, d\Omega$$

und aus der Ungleichung (6.14)

$$\int_{\Omega} M[\varphi_{n_1}(x)] \, d\Omega \leq \varliminf_{n \to \infty} \int_{\Omega} M[\tau_n(x)] \, d\Omega.$$

Durch Anwendung des Satzes von Fatoù erhält man die gewünschte Ungleichung durch Grenzübergang $n_1 \to \infty$.

Satz 6[5]

Die Folge meßbarer Funktionen $\{\tau_n\}$ genüge den Ungleichungen

$$\int_{\Omega} M[\tau_n(x)] \, d\Omega \leq K; \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6.15}$$

Dann läßt sich eine Teilfolge $\{\tau_{n_i}\}$ auswählen, die gegen ein Element $\tau(x)$ des Raumes L_M schwach konvergiert,

Beweis:

Nach der Youngschen Ungleichung gilt

$$\|\tau_n\|_M \leq K + 1 = k.$$

[5] vgl. [8]

Der Raum E_N ist separabel [8]; $v_1(x), v_2(x), \ldots$ sei eine abzählbare überall dichte Menge in E_N. Nach der Ungleichung

$$\left| \int_\Omega \tau(x) v(x)\, d\Omega \right| \leqslant \|\tau\|_M \|v\|_N$$

gilt

$$\left| \int_\Omega \tau_n(x)\, v_m(x)\, d\Omega \right| \leqslant k \|v_m\|_N \quad (n, m = 1, 2, \ldots).$$

Durch das Diagonalverfahren kann man eine Teilfolge $\{\tau_{n_i}(x)\}$ auswählen, so daß die Funktionale

$$l_m(\tau_{n_i}) = \int_\Omega \tau_{n_i}(x)\, v_m(x)\, d\Omega \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

für jedes $m = 1, 2, \ldots$ konvergieren.

Da die $v_m(x)$ $m = 1, 2, \ldots$ in E_N überall dicht sind, so konvergiert die Folge

$$l(\tau_{n_i}) = \int_\Omega \tau_{n_i}(x)\, v(x)\, d\Omega$$

für jedes $v \in E_N$.

Wir führen nunmehr die Bezeichnung

$$l(v) = \lim_{n_i \to \infty} \int_\Omega \tau_{n_i}(x)\, v(x)\, d\Omega \tag{6.16}$$

ein.

Wegen

$$|l(v)| \leqslant \sup_{n_i} \|\tau_{n_i}\|_M \|v\|_N \leqslant k \|v\|_N$$

ist $l(v)$ ein lineares Funktional in E_N und kann daher in der Form

$$l(v) = \int_\Omega \tau(x)\, v(x)\, d\Omega$$

dargestellt werden. Nach (6.16) ist $\tau(x)$ der schwache Grenzwert der Folge $\{\tau_{n_i}\}$.

Wir benötigen des weiteren einige bekannte Sätze über N'-Funktionen, deren Formulierung hier angegeben werden soll.

Definition 4

Wir sagen, die N'-Funktion $M(u)$ genügt einer Δ_2-Bedingung für großes u, wenn für $u \geqslant u_0 \geqslant 0$ eine Konstante m existiert, so daß die Ungleichung

$$M(2u) \leqslant m M(u) \quad \text{gilt.}$$

$I_{N'}$ (Noaillon-Banach) [5]

Ist eine Folge meßbarer Funktionen $\{u_n(x)\}$, $x \in \Omega$ konvergent im Mittel mit der N'-Funktion $M(r)$, so gibt es genau eine solche Funktion $u(x)$, so daß

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega M[u_n(x) - u(x)]\, d\Omega = 0 \quad \text{gilt.} \tag{6.17}$$

$II_{N'}$ (J. C. Burkill) [5]

Hat die N'-Funktion $M(r)$ die Eigenschaft Δ_2 für großes r und ist mindestens eines der Integrale

$$\int_\Omega M[u_n(x)]\, d\Omega \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6.18}$$

endlich, so folgt aus (6.17) die Endlichkeit aller Integrale (6.18), die Integrierbarkeit mit $M(r)$ des nach Satz $I_{N'}$ existierenden mittleren Limes, d. h. die Endlichkeit von

$$\int_\Omega M[u(x)]\, d\Omega$$

und die Beziehung

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega M[u_n(x)]\, d\Omega = \int_\Omega M[u(x)]\, d\Omega. \tag{6.19}$$

Satz 7. Vorausgesetzt:

I. Die rechtsseitig stetigen nichtfallenden Funktionen

$$\varrho_j(\xi),\ \xi \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m$$

genügen den Ungleichungen

$$\varrho_j(\xi) \geqslant \varrho_0 > 0, \quad \varrho_0 = \text{const}$$

und

$$\varrho_j(\xi) \leqslant \text{const} \cdot \varrho_j\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad \text{für} \quad \xi \geqslant \xi_0.$$

II. Der Definitionsbereich $\mathfrak{N}$ des Funktionals (6.1) sei dicht in einem schwach vollständigen Teilraum $\mathfrak{H}_0$ von $L_2(\Omega)$; für $u \in \mathfrak{N}$ gelten die Ungleichungen

$$\int_\Omega \tau_j^2(u)\, d\Omega \geqslant \gamma^2 \int_\Omega u^2\, d\Omega.$$

III. Überdies seien die Klassen $\{\tau_j(u)\}$ für $u \in \mathfrak{N}$ dicht in gewissen schwach vollständigen Teilräumen $\mathfrak{H}_j$ von $L_{M_j}(\Omega)$, $j = 1, \ldots, m$ und

$$d = \inf_{u \in \mathfrak{N}} \Phi_0(u).$$

Dann gibt es eine Minimalfolge $\{u_{n_k}\} \subset \mathfrak{N}$ von $\Phi_0(u)$

$$u_{n_k} \xrightarrow[n_k \to \infty]{\text{schwach}} u_0 \in \mathfrak{H}_0,\ \tau_j(u_{n_k}) \xrightarrow[n_k \to \infty]{\text{schwach}} \tau_{j0} \in \mathfrak{H}_j,\ j = 1, \ldots, m$$

$$\Phi_0(u_0) = \sum_{j=1}^{m} \int_\Omega M_j(\tau_{j0})\, d\Omega + \int_\Omega q u_0\, d\Omega = d.$$

Beweis:

$\{u_n\} \subset \mathfrak{N}$ sei die nach Hilfssatz 1 existierende Minimalfolge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Abschätzungen (6.10) gelten:

$$\int_\Omega M_j[\tau_j(u_n)]\, d\Omega < \frac{\|q\|^2}{\gamma^2 \varrho_0} = K; \quad j = 1, \ldots, m. \tag{6.20}$$

Die Folgen $\{\tau_j(u_n)\} = \{\tau_{jn}\}$ genügen offensichtlich den Bedingungen der Sätze 5, 6; die schwachen Grenzelemente der Folgen

$$\{\tau_j(u_{n_{ij}})\},\ \{u_n\} \supset \{u_{n_{i_j}}\} \supset \cdots \supset \{u_{n_{i_m}}\}$$

nennen wir τ_{j0}, $j = 1, \ldots, m$.

Wir betrachten noch das lineare Glied des Funktionals $\Phi_0(u_n)$. Nach (6.5) und (6.7) finden wir

$$\|u_{n_{i_m}}\| \leqslant \frac{\|q\|^2}{\gamma^4 \varrho_0^2} \tag{6.21}$$

Da die Kugel in $L_2(\Omega)$ schwach kompakt ist, existiert auch hier eine Teilfolge $\{u_{n_{i_0}}\} \subset \{u_{n_{i_m}}\}$, die schwach gegen ein Element $u_0(x) \in \mathfrak{H}_0$ konvergiert. Dabei ist

$$\lim_{n_{i_0} \to \infty} \int_\Omega q u_{n_{i_0}}\, d\Omega = \int_\Omega q u_0\, d\Omega \tag{6.22}$$

und nach Satz 5

$$\int_\Omega M_j(\tau_{j0})\, d\Omega \leqslant \lim_{n_{i_0} \to \infty} \int_\Omega M_j[\tau_j(u_{n_{i_0}})]\, d\Omega < K. \tag{6.23}$$

Aus (6.22) und (6.23) folgt

$$\Phi_0(u_0) = \sum_{i=1}^{m} \int_\Omega M_j(\tau_{j0})\, d\Omega + \int_\Omega q u_0\, d\Omega \leqslant d. \tag{6.24}$$

Wir betrachten nun die Klassen $\mathfrak{H}_{j,K}$ $j = 1, \ldots, m$, derjenigen Elemente von $\mathfrak{H}_j$, die der Ungleichung (6.20) genügen. Aus der schwachen Vollständigkeit der Teilräume $\mathfrak{H}_j \subset L_{M_j}$ und (6.23) folgt: $\tau_{j0} \in \mathfrak{H}_{j,K}$, $j = 1, \ldots, m$. Auf $\mathfrak{H}_{j,K}$ ist das Funktional $\int_\Omega M_j(\tau_j)\, d\Omega$ stetig (Satz $II_{N'}$; Normkonvergenz und Konvergenz im Mittel sind topologisch äquivalent, da $M_j(\tau_j)$ einer Δ_2-Bedingung genügt). Daher gilt:

$$\int_\Omega M_j(\tau_{j0})\, d\Omega \geqslant \inf_{u \in \mathfrak{N}} \int_\Omega M_j[\tau_j(u)]\, d\Omega, \quad j = 1, \ldots, m,$$

oder wegen (6.22) $\Phi_0(u_0) \geqslant d$. Der Vergleich mit (6.24) liefert $\Phi_0(u_0) = d$ und vervollständigt damit den Beweis des Satzes.

Satz 7 zeigt uns, in welcher Weise der Grenzwert einer Minimalfolge des Funktionals (6.1) als Lösung des Minimumproblems für dieses Funktional angesehen werden kann; hierbei tritt die Frage nach dem Zusammenhang zwischen den Funktionen $u_0(x)$ und $\tau_{j0}(x)$, $j=1,\ldots,m$ auf.

$\psi(x)$ sei eine in Ω beliebig oft differenzierbare Funktion, die außerhalb einer abgeschlossenen Menge $F_\psi \subset \Omega$ verschwindet. Dann gilt für $u(x) \in \mathfrak{N}$ die Identität

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial^l \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} d\Omega = (-1)^l \int_\Omega \psi \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} d\Omega. \quad (6.25)$$

Fernerhin sei

$$\tau_j^2(u) \geqq \mu \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=l} \left(\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right), \quad \mu > 0. \quad (6.26)^6$$

Durch Anwendung der vorangegangenen Sätze finden wir, daß geeignete Teilfolgen

$$\{u_k\}, \quad \left\{ \frac{\partial^l u_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\}; \quad \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i = l \right)$$

einer Minimalfolge in $L_2(\Omega)$ bzw. $L_M(\Omega)$ schwach konvergieren. Die Grenzwerte nennen wir entsprechend u_0, $\omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,0}$. Aus (6.25) folgt nun durch Grenzübergang

$$\int_\Omega u_0(x) \frac{\partial^l \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} d\Omega = (-1)^l \int_\Omega \psi \, \omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,0} \, d\Omega. \quad (6.27)$$

Die Identität (6.27) zeigt, daß die $\omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,0}$ verallgemeinerte Ableitungen der Funktion $u_0(x)$ im Sinne von S. L. Sobolew [9] sind. Wir werden für diese Ableitungen die übliche Schreibweise beibehalten:

$$\text{z. B.} \quad \omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,0} = \frac{\partial^l u_0}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Die Formel (6.10) liefert

$$\int_\Omega M[\tau_j(u_0)] \, d\Omega < \frac{\|q\|^2}{\gamma^2 \varrho_0}.$$

Aus (6.3) folgt daher

$$\int_\Omega \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=l} \left(\frac{\partial^l u_0}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 d\Omega < \frac{\|q\|^2}{\gamma^2 \varrho_0^2 \mu}.$$

Kommen auf der linken Seite dieser Ungleichung alle Ableitungen l-ter Ordnung der Funktion u_0 vor, so folgt hieraus die Existenz verallgemeinerter Ableitungen der Ordnungen $\nu = 0, \ldots, l-1$ der Funktion u_0 und ihre Integrierbarkeit mit der Potenz q^*

$$q^* < \frac{2n}{n-2(l-\nu)} \quad \text{für} \quad \nu \geqq l - \frac{n}{2}$$

bzw. ihre Stetigkeit für

$$\nu \leqq l - \left[\frac{n}{2} \right] - 1; \quad \nu = 0, 1, \ldots, l-1.$$

Für die Gültigkeit dieser Ergebnisse ist zu fordern, daß Ω als endliche Summe sternförmiger Gebiete (nach der Terminologie von S. L. Sobolew) dargestellt werden kann.

Wir betrachten einige Beispiele:

$$\text{(T)} \quad \Phi_0(u) = \int_\Omega \left[\int_0^{T^2} f(\xi) \, d\xi - 2\omega u \right] d\Omega, \; T^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (6.28)$$

Das Definitionsgebiet $\mathfrak{N}$ besteht aus den Funktionen, die in $\Omega + S$ stetige erste Ableitungen besitzen und auf dem Rande S verschwinden.

Ist die Funktion $\Gamma(\xi) = f(\xi^2)\xi$ (Abb. 1) rechtsseitig stetig, nichtfallend und genügt der Bedingung $\Gamma(\xi) \xrightarrow[\xi \to \infty]{} \infty$, $f(0) = f_0 > 0$, so konvergieren geeignete Teilfolgen der Minimalfolgen $\{u_n\}$ des Funktionals (6.28) mit ihren ersten Ableitungen schwach in $L_2(\Omega)$. Für ein Grenzelement u_0 einer derartigen Folge gilt die Abschätzung

$$\int_\Omega \int_0^{T_0^2} f(\xi) \, d(\xi) \, d\Omega \leqq \frac{\omega^2 b^4}{f_0}; \quad T_0^2 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2, \quad (6.29)$$

wenn b die Seite des Quadrats ist, das Ω einschließt. Ist $\Gamma(\xi)$ überdies zweimal stetig differenzierbar und genügt der Bedingung (5.4)

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = f(\xi^2) + 2f'(\xi)\xi^2 \geqq \varkappa > 0, \; \varkappa = \text{const},$$

so ist u_0 eindeutig bestimmt, $\|u_n - u_0\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$\text{(P)} \quad \Phi_0(w) = \int_\Omega \left[\int_0^{\tilde{H}^2(w)} g^*(\xi) \, d\xi - \frac{1}{D} pw \right] d\Omega \quad (6.30)$$

$$\tilde{H}^2(w) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \quad (6.31)$$

Das Definitionsgebiet $\mathfrak{N}$ besteht aus denjenigen Funktionen $w(x, y)$, die in $\Omega + S$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich besitzen, und die mit ihren Ableitungen erster Ordnung auf dem Rande S verschwinden.

Ist $g^*(\xi^2)\xi = T^*(\xi)$ rechtsseitig stetig, nichtfallend und genügt den Bedingungen

$$\text{für} \quad T^*(\xi) \to \infty; \; g^*(0) = g_0 > 0, \quad \xi \to \infty$$

so konvergieren die Minimalfolgen $\{w_n\}$ des Funktionals (6.30) mit ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung schwach in $L_2(\Omega)$. Für ein Grenzelement w_0 einer derartigen Folge gilt die Abschätzung

$$\int_\Omega \int_0^{\tilde{H}_0^2} g^*(\xi) \, d\xi \, d\Omega < \frac{\|p\|^2 b^4}{g_0}. \quad (6.32)$$

Ist $T^*(\xi)$ dreimal stetig differenzierbar und genügt der Bedingung

$$\frac{dT^*(\xi)}{d\xi} \geqq \varkappa > 0, \; \varkappa = \text{const},$$

so ist w_0 eindeutig bestimmt und es gilt $\|w_n - w_0\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Als letztes Beispiel betrachten wir hier das in Abb. 2 schematisch dargestellte Creep-Problem (RC). Das dem Problem zugeordnete Funktional ist

$$\Phi_0(\vec{w}) = \int_\Omega \left[\int_0^{E^2(\vec{w})} g(\xi) \, d\xi + \frac{1}{6k} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} \right)^2 - \right.$$
$$\left. - (K_x w_1 + K_y w_2 + K_z w_3) \right] d\Omega \quad (6.33)$$

$$E^2(\vec{w}) = \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)^2 +$$
$$+ \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial w_3}{\partial z} \right)^2 + \right. \quad (6.34)$$
$$\left. + \left(\frac{\partial w_3}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Das Definitionsgebiet $\mathfrak{N}$ besteht aus denjenigen Vektorfunktionen $\vec{w}(x, y, z)$, deren Komponenten stetige Ab-

---

[6] In der Summe $\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=l}$ brauchen nicht alle möglichen Ableitungen l-ter Ordnung vorzukommen; wir verabreden daher entsprechende Werte für Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

leitungen besitzen und folgenden Randbedingungen genügen:

$$\vec{w}|_{s_1} = 0 \tag{6.35}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}\cos nx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\right)\cos ny + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\right)\cos nz = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y}\right)\cos nx + \frac{\partial w_2}{\partial y}\cos ny + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right)\cos xz = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right)\cos nx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z}\right)\cos ny + \frac{\partial w_3}{\partial z}\cos nz = 0$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} = 0. \tag{6.36}$$

Die Bedingungen: $g(\xi^2)\,\xi = T(\xi)$ ist rechtsseitig stetig

für
$$T(\xi) \to \infty; \quad g(0) = g_0 > 0$$
$$\xi \to \infty \tag{6.37}$$

sichern die schwache Konvergenz in $L_2(\Omega)$ geeigneter Teilfolgen der Minimalfolgen $\{\vec{w}_n\}$ und der Deformationen

$$\varepsilon_{x,n} = \frac{\partial w_{1,n}}{\partial x}, \ldots, \gamma_{yz,n} = \frac{\partial w_{2,n}}{\partial z} + \frac{\partial w_{3,n}}{\partial y};$$

für das Grenzelement $\vec{w}_0$ gilt eine Abschätzung der Form

$$\int_\Omega \left[\int_0^{E^2(\vec{w})} g(\xi)\,d\xi + \frac{1}{6k}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z}\right)^2\right] d\Omega \leqslant C\|\vec{K}\|^2, \tag{6.38}$$

worin sich die Konstante C aus (5.31) und (6.37) bestimmen läßt.

VII. Erweiterung der Funktionale

Wir betrachten auf $\mathfrak{N} \subset L_2(\Omega)$ wieder das Funktional

$$\Phi_0(u) = \int_\Omega \sum_{i=0}^{m} \int_0^{\tau_i^2(u)} \varrho_i(\xi)\,d\xi\,d\Omega + \int_\Omega q u\,d\Omega, \tag{7.1}$$

wobei wir annehmen, daß die in Hilfssatz 1 formulierten Bedingungen bezüglich $\Phi_0(u)$ und Ω erfüllt sind. Diesmal setzen wir jedoch voraus, daß die Menge $\mathfrak{N}$ linear und die τ^2 positiv definite quadratische Formen in linearen Ausdrücken gewisser Ableitungen von u sind. $\{u_n\}$ sei wieder eine Minimalfolge von $\Phi_0(u)$.

Definition 5

Ein Funktional $F(u)$ heiße gleichmäßig konvex auf $\mathfrak{N}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$F(0) = 0; \quad F(-u) = F(u); \tag{7.2}$$

$$\varrho_F(u_1, u_2) = \frac{1}{2}F(u_1) + \frac{1}{2}F(u_2) - F\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) > F\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right) \quad \text{für} \quad u_1, u_2 \in \mathfrak{N}.$$

Hilfssatz 2

Die rechtsseitig stetige nichtfallende Funktion $\varrho(\xi)$, $0 \leqslant \xi < \infty$, genüge der Bedingung $\varrho(\xi) \geqslant \varrho(0) = \varrho_0 > 0$. Dann ist das Funktional

$$F(u) = \int_\Omega M(u)\,d\Omega$$
$$M(u) = \int_0^{\tau^2(u)} \varrho(\xi)\,d\xi$$

gleichmäßig konvex.

Beweis:

$\varrho(\xi)$ ist eine nichtabnehmende Funktion; daher genügt die Funktion $f(r^2) = \int_0^{r^2} \varrho(\xi)\,d\xi$ den Bedingungen

$$\frac{1}{2}f(r_1^2) + \frac{1}{2}f(r_2^2) - f\left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}\right) \geqslant 0 \tag{7.3}$$

$$f(r_1^2) + f(r_2^2) - f(r_1^2 + r_2^2) \leqslant 0. \tag{7.4}$$

Es sei nämlich $r_1^2 < r_2^2$; dann findet man

$$\frac{1}{2}[f(r_1^2) + f(r_2^2)] = \frac{1}{2}\left[\int_0^{r_1^2} \varrho(\xi)\,d\xi + \int_0^{r_2^2} \varrho(\xi)\,d\xi\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} \varrho(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int_{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}^{r_2^2} \varrho(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2}\int_{r_1^2}^{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} \varrho(\xi)\,d\xi >$$

$$> \int_0^{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} \varrho(\xi)\,d\xi = f\left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}\right)$$

und

$$f(r_1^2 + r_2^2) - f(r_1^2) - f(r_2^2) = \int_0^{r_1^2 + r_2^2} \varrho(\xi)\,d\xi - \int_0^{r_1^2} \varrho(\xi)\,d\xi - \int_0^{r_2^2} \varrho(\xi)\,d\xi = \int_{r_1^2}^{r_1^2 + r_2^2} \varrho(\xi)\,d\xi - \int_0^{r_1^2} \varrho(\xi)\,d\xi \geqslant 0.$$

In einem beliebigen Punkt x des Gebietes Ω ist $\tau^2(u)$ eine positiv definite quadratische Form in linearen Ausdrücken der Variablen

$$\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}};$$

daher genügt $\tau^2(u)$ einer Relation der Form

$$\frac{1}{2}\tau^2(u_1) + \frac{1}{2}\tau^2(u_2) = \tau^2\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) + \tau^2\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right). \tag{7.5}$$

In (7.3) ersetzen wir r_1^2 durch $\tau^2(u_1)$ und r_2^2 durch $\tau^2(u_2)$:

$$\frac{1}{2}f[\tau^2(u_1)] + \frac{1}{2}f[\tau^2(u_2)] - f\left[\frac{\tau^2(u_1) + \tau^2(u_2)}{2}\right] \geqslant 0.$$

Berücksichtigt man (7.5) und (7.4), so folgt hieraus

$$\frac{1}{2}f[\tau^2(u_1)] + \frac{1}{2}f[\tau^2(u_2)] - f\left[\tau^2\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)\right] \geqslant f\left[\tau^2\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right)\right]$$

und durch Integration (7.2).

Satz 8

Angenommen, die

$$F_i(u) = \int_\Omega \int_0^{\tau_i^2(u)} \varrho(\xi)\,d\xi\,d\Omega$$

genügen den Ungleichungen

$$\varrho_{F_i}(u_1, u_2) \geqslant 0, \quad \text{für} \quad u_1, u_2 \in \mathfrak{N}, \ i = 1, \ldots, m \tag{7.6}$$

sowie

$$\int_\Omega \int_0^{\tau_j^2} \varrho_j(\xi)\,d\xi\,d\Omega \geqslant \gamma^2 \int_\Omega u^2\,d\Omega \tag{7.7}$$

wenigstens für ein $j \in (1, 2, \ldots, m)$. Die rechtsseitig stetige nichtfallende Funktion $\varrho_j(\xi)$ genüge überdies der Bedingung

$$\varrho_j(0) = \varrho_0 > 0,$$

und $\tau^2(u)$ sei eine positiv definite quadratische Form in allen Ableitungen l-ter Ordnung der Funktion u. Dann konvergiert die Minimalfolge $\{u_n\}$ mit ihren Ableitungen einschließlich l-ter Ordnung in $L_2(\Omega)$ stark gegen $u_0(x)$ bzw. deren Ableitungen.

Beweis:

Nach Hilfssatz 1 existiert eine untere Grenze des Funktionals $\Phi_0(u)$ auf $\mathfrak{N}$.

Wir betrachten eine beliebige Minimalfolge $\{u_n\} \subset \mathfrak{N}$ und bilden den Ausdruck $\varrho_{\Phi_0}(u_p, u_q)$. Wie in Satz 3 stellen wir fest, daß für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und hinreichend großes ν; $p, q > \nu$ die Ungleichung

$$\varrho_{\Phi_0}(u_p, u_q) < \varepsilon$$

gilt.

Wegen (7.6) folgt hieraus erst recht $\varrho_{F_j}(u_p, u_q) < \varepsilon$. $F(u) = F_j(u)$ ist gleichmäßig konvex; es besteht also die Ungleichung

$$\varepsilon \geqq \varrho_F(u_p, u_q) \geqq F\left(\frac{u_p - u_q}{2}\right) \geqq 0 \qquad p, q > \nu.$$

Nun folgt aus $\varrho_j(\xi) \geqq \varrho_0$ und

$$\tau_j^2(u) \geqq \mu \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = l} \left(\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2$$

$$\left\| \frac{\partial^l u_p}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} - \frac{\partial^l u_q}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_2} \xrightarrow[\substack{p,q \to \infty \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = l}]{} 0$$

Wegen (7.7) gilt auch

$$\|u_p - u_q\|_{L_2} \xrightarrow[p,q \to \infty]{} 0.$$

Es existieren also die Grenzwerte

$$u_0 = \lim_{n \to \infty} u_n, \quad \omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0} = \lim_{n \to \infty} \frac{\partial^l u_n}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Im Sinne der verallgemeinerten Ableitungen nach S. L. Sobolew ist

$$\frac{\partial^l u_0}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0},$$

wie aus der Relation

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial^l \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} d\Omega = (-1)^l \int_\Omega \psi \frac{\partial^l u_n}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} d\Omega$$

für beliebige außerhalb $F_\psi \subset \Omega$ verschwindende l-fach stetig differenzierbare Funktionen $\psi(x)$ durch Grenzübergang für $n \to \infty$ hervorgeht; die Existenz der Ableitungen m-ter Ordnung, $m = 1, \ldots, l-1$, folgt aus den Ergebnissen von S. L. Sobolew [9].

Hilfssatz 3

Die zweimal stetig differenzierbare Funktion $\psi(\xi) = 2\varrho(\xi^2)\xi$, $\xi \geqq 0$, genüge der Bedingung

$$\psi''(\xi) > 0; \ \psi(0) = 0, \tag{7.8}$$

dann ist die Funktion

$$M(r) = \int_0^{|r|} \psi(\xi) d\xi$$

gleichmäßig konvex:

$$\alpha(r_1, r_2) \equiv \frac{1}{2} M(r_1) + \frac{1}{2} M(r_2) - M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) - M\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\right) > 0. \tag{7.9}$$

Beweis:

Es sei wieder $r_2 > r_1 > 0$;

$$\alpha(r_1, r_2) = \frac{1}{2}\int_0^{r_1} \psi d\xi + \frac{1}{2}\int_0^{r_2} \psi d\xi - \int_0^{\frac{r_1+r_2}{2}} \psi d\xi - \int_0^{\frac{r_2-r_1}{2}} \psi d\xi =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2} \psi d\xi - \frac{r_2 - r_1}{2} \psi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\right] +$$

$$+ \left[\frac{r_2 - r_1}{2} \psi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) - \int_{r_1}^{\frac{r_1+r_2}{2}} \psi d\xi - \int_0^{\frac{r_2-r_1}{2}} \psi d\xi\right] = k_1 + k_2.$$

Eine Taylor-Zerlegung ergibt

$$\int_{r_1}^{r_2} \psi d\xi = M(r_2) - M(r_1) = 2\psi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\frac{r_2 - r_1}{2} + \frac{1}{6}[\psi''(\tau_1) + \psi''(\tau_2)]\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^3,$$

da

$$M(r_2) = M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) + M'\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\frac{r_2 - r_1}{2} + \frac{1}{2} M''\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} M'''(\tau_1)\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^3$$

$$M(r_1) = M\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) - M'\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\frac{r_2 - r_1}{2} + \frac{1}{2} M''\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} M'''(\tau_2)\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^3$$

und folglich $k_1 > 0$

$$k_2 = \left[\frac{1}{2}\frac{r_2 - r_1}{2}\psi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{r_2 - r_1}{2}\psi(r_1) - \frac{1}{2}\frac{r_2 - r_1}{2}\psi\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)\right] + \left[\frac{1}{2}\frac{r_2 - r_1}{2}\psi\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right) - \int_0^{\frac{r_2-r_1}{2}} \psi d\xi\right] + \left[\frac{1}{2}\frac{r_2 - r_1}{2}\psi(r_1) + \frac{1}{2}\frac{r_2 - r_1}{2}\psi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) - \int_{r_1}^{\frac{r_1+r_2}{2}} \psi d\xi\right] =$$

$$= k_3 + k_4 + k_5.$$

Aus der Bedingung (7.8) folgert man

$$\psi'(\xi)\xi - \psi(\xi) > 0 \tag{7.10}$$

$$\psi(\xi_1) + \psi(\xi_2) - \psi(\xi_1 + \xi_2) < 0. \tag{7.11}$$

Integriert man (7.10) über das Intervall $\left(0, \frac{r_2 - r_1}{2}\right)$, so erhält man

$$\psi\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)\frac{r_2 - r_1}{2} - 2\int_0^{\frac{r_2-r_1}{2}} \psi d\xi > 0 \quad \text{oder} \quad k_4 > 0.$$

Wir führen die Funktion $\tilde{\psi}(\xi) = \psi(r_1 + \xi) - \psi(r_1)$ ein, die offensichtlich den Bedingungen (7.8) genügt;

$$\tilde{\psi}'(\xi)\xi - \tilde{\psi}(\xi) > 0.$$

Durch Integration erhalten wir wieder

$$\tilde{\psi}\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)\frac{r_2 - r_1}{2} - 2\int_0^{\frac{r_2-r_1}{2}} \tilde{\psi} d\xi > 0.$$

Wir kehren in dieser Ungleichung zur Funktion $\psi(\xi)$ zurück und finden

$$\psi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\frac{r_2 - r_1}{2} - \psi(r_1)\frac{r_2 - r_1}{2} - 2\int_{r_1}^{\frac{r_1+r_2}{2}} \psi d\xi + 2\psi(r_1)\frac{r_2 - r_1}{2} > 0$$

oder $k_5 > 0$.

Endlich ist $k_3 \geqq 0$ eine Folge von (7.11) für

$$\xi_1 = \frac{r_2 - r_1}{2}, \quad \xi_2 = r_1.$$

Die Behauptung ist somit bewiesen.

Satz 9

Angenommen

$$F_i(u) = \int_\Omega \int_0^{\tau_i^2(u)} \varrho_i(\xi)\, d\xi\, d\Omega \geqq \gamma^2 \int_\Omega u^2\, d\Omega \tag{7.12}$$

für $u \in \mathfrak{N}$ und $i = 1, \ldots, m$;

außerdem sei $\Gamma_i = 2\,\varrho_i(\xi^2)\,\xi$ zweimal stetig differenzierbar und genüge den Bedingungen

$$\begin{gathered} \Gamma_i''(\xi) \geqq 0 \quad \text{für} \quad \xi \geqq 0, \quad \Gamma_i(0) = 0; \\ \Gamma_i(2\xi) < m_i \Gamma_i(\xi), \quad m_i = \text{const}, \quad i = 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{7.13}$$

Die $\tau_i^2(u)$ stellen wieder positiv definite quadratische Formen in linearen Ausdrücken gewisser Ableitungen von u dar. Dann gilt

$$d = \inf_{u \in \mathfrak{N}} \Phi_0(u) = \Phi_0(u_0) \tag{7.14}$$

wenn u_0 das Grenzelement einer Minimalfolge des Funktionals $\Phi_0(u)$ ist.

Beweis:

$\{u_n\}$ sei eine Minimalfolge des Funktionals $\Phi_0(u)$. Dann gilt die Ungleichung

$$\varrho_{F_j}(u_p, u_q) < \varrho_{\Phi_0}(u_p, u_q) < \varepsilon \qquad p, q > \nu.$$

Wir gehen nun mit $r_1 = |\tau(u_p)|$, $r_2 = |\tau(u_q)|$ in (7.9) (Hilfssatz 3) ein und bemerken, daß nach (5.1) die Ungleichung

$$\frac{1}{2}|\tau(u_p)| + \frac{1}{2}|\tau(u_q)| \geqq \left|\tau\left(\frac{u_p + u_q}{2}\right)\right|$$

besteht. Daher ist

$$\begin{aligned} \varepsilon > \varrho_{\Phi_0}(u_p, u_q) &> 2 \int_\Omega \int_0^{\frac{1}{2}||\tau_j(u_p)| - |\tau_j(u_q)||} \varrho_j(\xi^2)\, \xi\, d\xi\, d\Omega = \\ &= 2 \int_\Omega M\left\{\frac{1}{2}[\tau_j(u_p) - \tau_j(u_q)]\right\} d\Omega. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Durch Anwendung der Sätze $\mathrm{I}_{N'}$, $\mathrm{II}_{N'}$ [die Beschränktheit der Integrale (6.18) folgt aus der Ungleichung (6.10)] und der Δ_2-Bedingung finden wir

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega M[\tau_j(u_n)]\, d\Omega = \int_\Omega M[\tau_j(u_0)]\, d\Omega.$$

Aus (7.12) und (7.15) folgt sodann

$$\|u_n - u_0\|_{L_2(\Omega)} \to 0$$

und daher

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_0(u_n) = \Phi_0(u_0) = d.$$

Das Beweisverfahren in den Sätzen 8, 9 liefert ein Verfahren zur Erweiterung des Funktionals $\Phi_0(u)$.

Hierzu führen wir auf $\mathfrak{N}$ die Norm

$$\|u\|_{\mathfrak{N}} = \sum_{j=1}^{m} \|\tau_j(u)\|_M + \|u\|_{L_2} \quad \text{ein.} \tag{7.16}$$

Die Vervollständigung von $\mathfrak{N}$ im Sinne der Metrik (7.16) nennen wir $B_{\mathfrak{N}}$. Das Funktional $\Phi_0(u)$ ist wegen der Δ_2-Bedingung auf $B_{\mathfrak{N}}$ erklärt, seine untere Schranke $d = \inf_{u \in \mathfrak{N}} \Phi_0(u)$ ändert sich bei dieser Erweiterung nicht.

Die Behauptung des Satzes 9 läßt sich aber auch in folgender Weise formulieren:

Unter den Bedingungen von Satz 9 existiert eine eindeutig bestimmte Lösung des Minimumproblems für das Funktional (7.1) auf $B_{\mathfrak{N}}$ für alle $q \in L_2(\Omega)$.

Wir betrachten einige Beispiele.

Das in Abb. 1 gezeigte Diagramm $E = 2 f(T^2) T$ oder $T = 2 g(E^2) E$ ist charakteristisch für das mechanische Verhalten von Metallen. Die Funktion $E(\xi)$ genügt den Bedingungen der Hilfssätze 2 und 3; dies folgt bei zweimal stetiger Differenzierbarkeit aus der Konvexität von $E(\xi)$, die sich durch die Bedingungen

$$E'' \geqq 0 \quad \text{bzw.} \quad f'(T^2) = \frac{1}{4T^2}\left(\frac{dE}{dT} - \frac{E}{T}\right) \geqq 0$$

beschreiben läßt. Die Funktion $f(\xi)$ kommt in den Beispielen (T), (ED) und (ES) vor.

Wir setzen zunächst die Untersuchung des Torsionsproblems (T) fort. Das Variationsproblem lautet

$$\Phi(u) = \int_\Omega \left[\int_0^{T^2(u)} f(\xi)\, d\xi - 2\omega u\right] d\Omega \to \min. \qquad T^2 \equiv (\operatorname{grad} u)^2 \tag{7.17}$$

auf der Menge $\mathfrak{N}$ der in $\Omega + S$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, die auf dem Rande verschwinden. Ist die Funktion $f(T^2)$ zweimal stetig differenzierbar und genügt den Bedingungen

$$f(0) = f_0 > 0, \quad f'(T^2) \geqq 0, \tag{7.18}$$

so konvergiert jede Minimalfolge $\{u_n\}$ mit ihren ersten Ableitungen stark in $L_2(\Omega)$. Das Grenzelement u_0 realisiert das Minimum des Funktionals (7.17). Dieses Ergebnis ist um so wichtiger, als die Funktion $u(x, y)$ des Torsionsproblems wenig Bedeutung besitzt. Die Spannungen werden durch die ersten Ableitungen dieser Funktion dargestellt.

(ES) Das Funktional

$$\begin{gathered} \Phi(w) = \int_\Omega \left[\int_{T^2(v)}^{T^2(v+w)} f(\xi)\, d\xi + k \Delta\left(v + \frac{1}{2} w\right) \Delta w\right] d\Omega \\ T^2(w) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \end{gathered} \tag{7.19}$$

kennzeichnet ein inhomogenes Problem und ist von dem Funktional (7.1) offensichtlich verschieden.

Das Definitionsgebiet $\mathfrak{N} \ni w$ ist die Menge aller in $\Omega + S$ viermal stetig differenzierbaren Funktionen, v eine gegebene Funktion, von der wir annehmen daß das Integral

$$\int_\Omega \int_0^{T^2(v)} f(\xi)\, d\xi\, d\Omega$$

existiert. Es soll nun gezeigt werden, daß dieselben Ideen, die den Sätzen 8, 9 zugrunde liegen, auch hier zum Ziele führen. Ist nämlich $f(T^2)$ dreimal stetig differenzierbar und genügt den Bedingungen

$$\begin{gathered} f(T^2) > f(0) = f_0 > 0; \quad f''(T^2) \geqq 0 \\ f(2T^2) < l f(T^2) \quad \text{für} \quad l > 0 \quad \text{und} \quad T^2 > T_0^2, \end{gathered} \tag{7.20}$$

so konvergiert die Minimalfolge $\{u_n\} = \{v + w_n\}$ mit allen Ableitungen bis einschließlich zweiter Ordnung stark in $L_2(\Omega)$.

Außerdem gilt $\Phi(u_0) = d = \inf \Phi(u)$, wenn u_0 das Grenzelement der Folge $\{u_n\}$ ist.

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß aus dem Homogenisierungsprinzip und den Sätzen 1–4 die Existenz einer unteren Schranke $d = \inf \Phi(w)$, $w \in \mathfrak{N}$ und die Konvergenz der Folge $\{w_n\}$ gegen eine Funktion $w_0 \in L_2(\Omega)$ folgt.

Wir kehren nun zur Folge $\{u_n\}$ zurück und setzen

$$\Psi(u_n) = \Phi(w_n) = \int_\Omega \int_0^{T^2(u_n)} f(\xi)\, d\xi\, d\Omega +$$

$$+ \frac{k}{2}\int_\Omega (\Delta u_n)^2\, d\Omega - \int_\Omega \int_0^{T^2(v)} f(\xi)\, d\xi\, d\Omega - \frac{k}{2}\int_\Omega v^2\, d\Omega =$$

$$= F_1(u_n) + F_2(u_n) + C_1 + C_2,$$

mit

$$F_1(u_n) = \int_\Omega \int_0^{T(u_n)} f(\xi)\, d\xi\, d\Omega$$

$$F_2(u_n) = \int_\Omega (\Delta u_n)^2\, d\Omega.$$

Die Konstanten C_1, C_2 sind für die Lösung des Konvergenzproblems unwesentlich. Da überdies aus

$$F_1(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_1(u_0) \quad *) \text{ wegen } f(\xi) \geqslant f_0 > 0$$

und

$$T^2(u_n) \geqslant \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right]$$

$$F_2(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_2(u_0)$$

folgt, genügt es, die Relation *) zu beweisen. Dieser Beweis unterscheidet sich nicht wesentlich von dem der Sätze 8, 9.

Man bildet zunächst $\varrho_\psi(u_p, u_q)$ und findet für $p, q > \nu$ und beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon > \varrho_\psi(u_p, u_q) \geqslant \varrho_{F_1}(u_p, u_q).$$

Durch Anwendung von Hilfssatz 2 erhält man

$$\varepsilon > \int_\Omega \int_0^{\frac{1}{4}T^2(u_p - u_q)} f(\xi)\, d\xi\, d\Omega.$$

Diese Abschätzung bedeutet, daß die Folge $\{u_n\}$ mit ihren Ableitungen bis einschließlich zweiter Ordnung in $L_2(\Omega)$ gegen u_0 konvergiert.

Eine Abschätzung der Form

$$F_1(u_n) < K \quad n = 1, 2 \ldots$$

besteht offensichtlich für

$$K = \int_\Omega \left[\int_0^{T^2(v)} f(\xi)\, d\xi - \frac{k}{2} v^2\right] d\Omega,$$

da im gegenteiligen Fall $\Psi(u_n) > 0$ gelten müßte, für $u_n = v$ aber $\Psi(u_n) = 0$ ist. Die Anwendung des Hilfssatzes 3 und der Sätze $\mathrm{I}_{N'}$ und $\mathrm{II}_{N'}$ führt nunmehr zu unserer Behauptung $\Psi(u_0) = d$.

VIII. Das Ritzsche Verfahren

Das Funktional $\Phi_0(u)$ (7.1) genüge auf $\mathfrak{N} \subset L_2(\Omega)$ den Bedingungen von Satz 9. $B_\mathfrak{N}$ sei wieder die metrische Vervollständigung von $\mathfrak{N}$ mit Hilfe der Norm (7.16). Wie wir sahen, besitzt das Minimumproblem für $\Phi_0(u)$ auf $B_\mathfrak{N}$ eine eindeutig bestimmte Lösung für $q \in L_2(\Omega)$. Dieses Ergebnis leiteten wir aus der Existenz von Minimalfolgen her, wobei die konkrete Form dieser Folgen unwesentlich war. Es soll nun gezeigt werden, daß das Ritzsche Verfahren zur Konstruktion von Minimalfolgen geeignet ist und somit auch Näherungslösungen liefert. Die vorangegangenen Konvergenzbetrachtungen lassen sich ohne weiteres auf das Ritzsche Verfahren übertragen. Auf $\mathfrak{N}$ wählen wir eine abzählbare überall dichte Menge $\{v_n\}$, die natürlich auch in $B_\mathfrak{N}$ überall dicht ist. Der Ausdruck „überall dicht" ist im Sinne der Norm in $B_\mathfrak{N}$ gemeint. $B_\mathfrak{N}$ ist als Teilraum einer direkten Summe separabler Räume selbst separabel, eine Menge $\{v_k\}$ mit den gewünschten Eigenschaften existiert also. Um eine Näherungslösung zu erhalten, setzen wir

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k. \tag{8.1}$$

Die Koeffizienten a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ werden aus der Bedingung $\Phi_0(u_n) = \min.$ bestimmt.

Satz 10

Unter den Bedingungen von Satz 9 existiert eine Lösung des Ritzschen Verfahrens für jedes endliche $n = 1, 2, \ldots$

Beweis

Das Funktional $\Phi_0(u)$ ist auf der abgeschlossenen linearen Hülle Σ_n der Elemente v_k $k = 1, 2, \ldots, n$ erklärt und stetig. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die u_n den Bedingungen (6.10), (6.17) genügen:

$$\|\tau_j(u_n)\|_M \leqslant \int_\Omega M[\tau_j(u_n)]\, d\Omega + 1 \leqslant \frac{\|q\|_{L_2}^2}{\gamma^2 \varrho_0} + 1$$

$$\|u_n\|_{L_2} \leqslant \frac{\|q\|_{L_2}}{\gamma^2 \varrho_0}.$$

(Es existiert also eine Konstante K, so daß für $u_n \in B_\mathfrak{N}$ $\|u_n\|_\mathfrak{N} \leqslant K$ gilt).

Es genügt also nachzuweisen, daß das stetige Funktional $\Phi_0(u_n)$ auf einem abgeschlossenen endlich-dimensionalen, beschränkten Gebiet des Raumes $B_\mathfrak{N}$ sein Minimum annimmt. Den Beweis liefert der klassische Satz von Weierstrass.

Satz 11

Unter den Bedingungen von Satz 9 bilden die Näherungslösungen des Ritzschen Verfahrens eine Minimalfolge.

Wir beweisen folgendes: zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ existiert ein n, so daß $\Phi_0(u_n) < d + \varepsilon$ gilt, $d = \inf_{u \in B_\mathfrak{N}} \Phi(u)$

Nach Satz 8 gibt es ein $u_0 \in B_\mathfrak{N}$, $\Phi_0(u_0) = d$.

Wegen der Separabilität von $B_\mathfrak{N}$ existiert für jedes $\delta > 0$ eine Linearkombination

$$u_n^* = \sum_{k=1}^{n} b_k v_k, \quad v_k \in B_\mathfrak{N},$$

und

$$\|u_n^* - u_0\|_\mathfrak{N} < \delta. \quad \Phi_0(u)$$

ist stetig; daher kann δ so gewählt werden, daß

$$|\Phi_0(u_0) - \Phi_0(u_n^*)| < \varepsilon$$

gilt. Dann ist

$$d = \Phi_0(u_0) \leqslant \Phi_0(u_n^*) < d + \varepsilon.$$

Nach Satz 10 existiert für dieses n eine Lösung des Ritzschen Verfahrens u_n. Dann ist offensichtlich

$$d = \Phi(u_0) \leqslant \Phi_0(u_n) \leqslant \Phi_0(u_n^*) < d + \varepsilon.$$

LITERATUR

[1] Katschanow, L. M., Die Mechanik der plastischen Medien. GITTL, M-L (1948) russ.

[2] Dshanelidse, G. J., Ein vollständiges Gleichungssystem der Plastizitätstheorie in den Spannungen und seine Anwendungen. Arbeiten der Leningrader Polytechnischen Hochschule M. I. Kalinin, Nr. 3 (1947) russ.

[3] Koschelew, A. I., Verallgemeinerte Lösungen des elastisch-plastischen Torsionsproblems. Dokl. Akad. nauk SSSR 99, Nr. 3 (1954) russ.
[4] Katschanow, L. M., Einige Probleme der Creep-Theorie. GITTL, M-L (1949) russ.
[5] Birnbaum, Z. W., und W. Orlicz, Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen. Studia Math., Bd. 3 (1931).
[6] Ljusternik, L. A., und W. I. Sobolew, Elemente der Funktionalanalysis. Akademie-Verlag Berlin 1955.
[7] Michlin, S. G., Das Minimum-Problem für das quadratische Funktional. GITTL, M-L (1952) russ.
[8] Krasnoselski, M. A., und J. B. Rutizki, Allgemeine Theorie der Orlicz-Räume. Arbeiten des Funktionalanalytischen Seminars der Staatsuniversität Woronesh, Nr. 1 (1956) russ.
[9] Sobolew, S. L., Einige Anwendungen der Funktionalanalysis in der mathematischen Physik. LGU-Verlag, Leningrad 1950, russ.

(Eingegangen: 22. 5. 1959)

Zusammenfassung

ARNO LANGENBACH

Variationsmethoden in der nichtlinearen Elastizitäts- und Plastizitätstheorie

Verschiedene nichtlineare Probleme der HENCKYschen Plastizitätstheorie werden als Operatorengleichungen im Hilbertraum formuliert und mit Hilfe allgemeiner Methoden in äquivalente Variationsprobleme umgewandelt. Die hierbei auftretenden Funktionale weisen gewisse nur von einer Materialfunktion abhängige metrische Eigenschaften auf, die zur Konstruktion und Untersuchung verallgemeinerter Lösungen der betrachteten Probleme benutzt werden.

АРНО ЛАНГЕНБАХ:

Вариационные методы в нелинейной теории упругости и пластичности

Некоторые нелинейные задачи теории пластичности Генки формулируются в виде операторных уравнений, которые при помощи общих методов приводятся к вариационным задачам. Встречающиеся при этом функционалы обладают некоторыми метрическими свойствами, которые используются для построения и исследования обобщенных решений рассмотренных задач.

ARNO LANGENBACH:

Methods of variation in the theory of nonlinear elasticity and plasticity

Several nonlinear problems of HENCKY's theory of plasticity are formulated as operator equations in the Hilbert space and transformed into equivalent variation problems by means of general methods. The occuring functionals show certain metric properties dependent on one material function only, which can be used for the construction and examination of generalized solutions of the problems under consideration.

ARNO LANGENBACH

Méthodes de variation dans la théorie de l'élasticité et plasticité non-linéaires

On formule quelques problemes non-lineaires de la théorie de plasticité de HENCKY comme équations opératrices dans l'espace de Hilbert, puis, on les transforme, à l'aide de méthodes générales, en problemes de variation équivalents. Les fonctionnels y apparaissant montrent certaines propriétés métriques ne dépendant que d'une seule fonction matérielle, propriétés pouvant etre utilisées pour la construction et l'examen de solutions généralisées des problemes étudiés.